ISSN: 0798-1015

REVISTA ESPACIOS

Educación • Education • Educação • Vol. 41 (26) 2020 • Art. 17

Recibido/Received: 23/04/2020 • **Aprobado**/Approved: 30/06/2020 • **Publicado**/Published: 16/07/2020

Problemas rutinarios y sus soluciones enriquecidas con el uso de tecnología: Geogebra y los vectores

Routine problems and their enriched solutions with the use of technology: Geogebra and vectors.

CAMPOS-NAVA, Marco [1]
TORRES-RODRÍGUEZ, Agustín A [2]
GUTIÉRREZ-GONZÁLEZ, Jaime J. [3]
MORALES-MAURE, Luisa [4]
GARCÍA-MARIMÓN, Orlando E. [5]

Resumen

Este trabajo se centra en una experiencia en aula usando herramientas digitales de un Sistema de Geometría Dinámica para el aprendizaje matemático y ha sido apoyado en una modalidad de investigación cualitativa sobre un estudio de casos. Se describe la propuesta de una tarea y analizan resultados de su implementación con un grupo de estudiantes universitarios de un curso de Física donde permiten a ellos visualizar qué posibles valores tienen las incógnitas de problemas con vectores usando Geogebra.

Palabras clave: Herramientas digitales; problemas de mecánica; Geogebra; tareas de aprendizaje matemático.

Abstract

This work focuses on a classroom experience using digital tools of a Dynamic Geometry System for mathematical learning and has been supported by a modality modality of research on a case study. The proposal of a task is described and the results of its implementation are analyzed with a group of university students of a Physics course where they are allowed to visualize what possible values are the unknowns of problems with vectors using Geogebra.

key words: Digital tools; mechanical problems; Geogebra; mathematical learning tasks.

1. Introducción

Una de las principales preocupaciones de algunos profesores de Matemática es saber en qué fuentes puede encontrar problemas interesantes, que motiven a sus estudiantes a querer resolverlos, y que en el proceso de

[1] Docente e Investigador. Área Académica de Matemáticas y Física . Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, , México. . mcampos@uaeh.edu.mx
[2] Docente e Investigador. Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Atitalaquia, México. dcb@iyatitalaquia.edu.mx
[3] Docente e Investigador. Departamento de Matemáticas, Universidad de Panamá, Panamá. jaime.gutierrez@up.ac.pa
[4] Docente e Investigador. Departamento de Matemáticas, Universidad de Panamá, Panamá. luisa.morales@up.ac.pa
[5] Docente e Investigador. Departamento de Matemáticas, Universidad de Panamá, Panamá. orlando.egarcia@up.ac.pa

solución identifiquen relaciones entre tópicos que conocen y nuevos tópicos que está por descubrir, con la finalidad de que aprendan matemáticas bajo un enfoque de resolución de problemas.

En este sentido, la fuente de los buenos problemas para la clase de Matemática, pudiera ser considerado el santo grial para los profesores; sin embargo desconocemos si existe un libro que cumpla esta función, por el contrario consideramos que un buen problema para ser propuesto a los estudiantes durante sus clases puede surgir de diferentes fuentes, desde situaciones cotidianas, hasta su identificación en libros de texto convencionales que recomiendan los programas de estudio.

Adicionalmente, cuando se introduce tecnología en la clase de Matemática, específicamente herramientas digitales, como calculadoras graficadoras, hojas de cálculo, software de cálculo simbólico (CAS), o sistemas de geometría dinámica (SGD) como el caso de Geogebra, problemas que en apariencia pueden ser rutinarios, se pueden ver enriquecidos y son capaces de potenciar las relaciones entre diferentes tópicos de la Matemática que permitan al estudiante estructurar de forma más ordenada los conceptos que aprende en clase.

En este orden de ideas, es que proponemos elegir problemas en apariencia rutinarios de libros de texto, particularmente problemas sobre vectores, para enriquecerlos con la introducción del SGD Geogebra en su solución y documentar cómo un grupo de estudiantes los resuelven en el ambiente de lápiz y papel y de qué manera cambian las estrategias de solución y el entendimiento entre tópicos de la Matemática relativos a los vectores, cuando los resuelven con el uso de un SGD.

Se ha elegido el tópico de vectores en dos dimensiones ya que es recurrente que, en cursos de mecánica clásica, álgebra lineal y cálculo vectorial, tradicionalmente se enseñe a los estudiantes a realizar operaciones entre vectores, tales como sumas, diferencias, multiplicación por un escalar y los productos escalar y vectorial, para después utilizar dichas operaciones y propiedades para resolver problemas que involucren vectores en un contexto matemático o en un contexto de aplicaciones prácticas que involucren fuerzas, velocidades y aceleraciones.

En este sentido, se puede mencionar que la enseñanza tradicional de operaciones con vectores, contextualizándolos en problemas que involucren la aplicación de fuerzas, incluye realizar el cálculo de las diferentes componentes rectangulares de éstas, y para ello se ponen en juego conocimientos de tipo matemático sobre ángulos y funciones trigonométricas, entre otros conceptos previos. Es común que los estudiantes presenten algunas dificultades al resolver este tipo de ejercicios típicos, tales como el manejo de las propias funciones trigonométricas, las direcciones y signos a emplear para los distintos vectores que representan las fuerzas, la estimación de ángulos de referencia, entre otros.

Una premisa central en este trabajo es que el empleo de una herramienta digital tal como un SGD, permite enriquecer no sólo los registros de representación posibles (Duval, 1993), lo que de antemano implica mejorar la comprensión del planteamiento del problema por parte del estudiante, sino inclusive fungir como herramientas cognitivas que pueden potenciar el aprendizaje. En este sentido, Pea (1985) las identifica como amplificadoras y reorganizadoras del conocimiento. Si además las herramientas digitales se utilizan como parte de una tarea de aprendizaje bien planificada, se puede conseguir que el estudiante alcance un conocimiento más profundo del tema o problema abordado, lo que permitiría alcanzar un mejor desempeño en la resolución de este tipo de problemas, que son "típicos" en los textos de mecánica en el nivel superior.

Se identifica entonces la potencialidad que puede tener el empleo de un SGD que no solo sirva para la representación inicial del problema, sino que sea eje central en su análisis y discusión. El interés se centra en identificar qué ideas matemáticas pueden surgir y extenderse cuando se introduce el empleo de un software de estas características en la discusión de problemas "típicos" de vectores, en contrapartida de cuándo la solución se plantea solamente en el ambiente de lápiz y papel.

1.1. Marco Teórico

Para el desarrollo de este trabajo se consideraron algunas ideas y conceptos provenientes de 3 marcos teóricos relevantes en el campo de la educación matemática. El primer marco, es el referente al enfoque de resolución de problemas (Santos-Trigo 2007; Schoenfeld, 1985; Polya, 1945), el segundo es en torno al empleo de las herramientas digitales en la enseñanza (Lesh & Doerr, 2003; Arcavi & Hadas, 2000; Pea, 1985), y el tercero consiste en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993). También consideramos el constructo denominado tareas de aprendizaje matemático TAM, (Campos y Torres, 2017; Barrera y Reyes, 2013; Stein & Smith, 1998).

El enfoque de resolución de problemas es un enfoque de enseñanza, que propone al profesor guiar a sus estudiantes en la construcción de su conocimiento a través de algunos elementos del pensamiento matemático (Isoda y Olfos, 2009). Dentro de esta perspectiva, un buen problema para la clase de física o matemáticas, es aquel que tiene algunas de las siguientes características: permitir al alumno alcanzar nuevos conocimientos o habilidades, a partir de poner en juego conocimientos previos; además procura desarrollar actividades tales como la inducción, formulación, modelación, representación, argumentación y validación.

Este enfoque de enseñanza puede acoplarse con el empleo de herramientas digitales para la clase de la física o matemáticas, situación que ha sido recomendada por diferentes investigaciones, que señalan algunos de los posibles beneficios de esta combinación: en general podemos afirmar que ofrece nuevas oportunidades para plantear y discutir problemas dado que permite una diferente “aproximación empírica y visual que a su vez puede coadyuvar en una mejor comprensión del problema en estudio” (Barrera y Reyes, 2013, p. 111).

En este sentido, las herramientas influyen en las formas de pensar y razonar de las personas, ya que registros de representación tales como palabras, dibujos, símbolos alfanuméricos, gráficas, configuraciones dinámicas, tablas, entre otros, permiten externar y organizar ideas, así como reflexionar acerca de nuestros procesos de pensamiento (Pea, 1987; Koehler & Mishra, 2009, citados en Ortega, Reyes y Vargas, 2017).

La aproximación visual distinta, constituye de hecho un nuevo registro de representación semiótico. Para Duval (1993), las distintas representaciones semióticas resultan fundamentales en la aprehensión de los conceptos matemáticos, y la utilización de una herramienta tecnológica como el SGD, permite en ese sentido la representación de objetos matemáticos, con la ventaja adicional de proporcionar un ambiente dinámico e interactivo que le resulta más familiar a los estudiantes.

Además, algunos autores identifican que las herramientas digitales pueden fungir incluso como herramientas cognitivas y no solo amplificar, sino reorganizar los procesos cognitivos en el estudiante (Pea, 1985), debido a que permiten reforzar varios de los procesos del pensamiento matemático, como es el caso de visualizar, experimentar, corroborar, analizar, reflexionar, realizar pruebas y demostraciones, (Lesh & Doerr, 2003; Arcavi & Hadas, 2000).

Las acciones del docente durante la implementación del enfoque de resolución de problemas, juega sin embargo un papel crucial. Esto quiere decir que no es suficiente que el profesor les proponga un buen problema a sus estudiantes, sino que despliegue un conjunto de condiciones y actuaciones que guíen el desarrollo de la actividad hacia el cumplimiento del objetivo de aprendizaje. En este sentido, resulta relevante el concepto denominado tareas de aprendizaje matemático, (Stein, Remmillard & Smith, 2007; Bayazit, 2006).

TAM permitiría implementar adecuadamente un problema a resolver en la clase de Física o Matemática, pues incluye un conjunto de elementos, tales como la (s) trayectoria (s) de instrucción, las intervenciones del profesor, o las rutas hipotéticas de solución (Campos y Torres, 2017); y por ello se pueden considerar como un medio a través del cual el profesor puede conseguir que sus estudiantes entiendan las ideas matemáticas puestas a discusión.

2. Metodología

Debido a que este trabajo se centra en una experiencia en aula, nos hemos apoyado en una modalidad de la investigación cualitativa que es el estudio de casos. Recordemos que el uso de datos cualitativos tiene, entre otras características, preservar el flujo cronológico de los eventos, así como determinar la forma en que diversas variables que influyen en el fenómeno de interés interactúan entre sí (Álvarez-Gayou, 2005; Denzin y Lincon, 2003). La investigación cualitativa se interesa más en saber cómo ocurren los procesos que originan o dan lugar al fenómeno de interés. El propósito del estudio de casos como metodología de investigación, consiste en retratar, analizar e interpretar la singularidad de la realidad individual a través de experiencias limitadas, en las que se buscan detalles a profundidad a partir de la observación participante y no participante (Cohen, Manion & Morrison, 2004).

En este sentido, para llevar a cabo la experiencia en el aula, lo que se decidió fue interactuar con un grupo de 15 estudiantes de cuarto semestre de la licenciatura en matemáticas de una universidad pública, los cuales cursaban la asignatura de conceptos de física (tópicos relativos a mecánica clásica). Como antecedentes matemáticos, los estudiantes cursaron previamente Geometría Analítica y Cálculo Diferencial. Se tuvieron sesiones previas con el grupo, durante las cuales se hizo un recordatorio de tópicos generales de geometría y trigonometría, tales como el Teorema de Pitágoras, Ley de Senos y Cosenos y relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos.

Posteriormente se introdujeron conceptos propios de la asignatura, principalmente el de vector, se definieron conceptos como suma de vectores, descomposición vectorial, ley del paralelogramo para la suma y método de las componentes rectangulares, a la par de estos conceptos, se introdujo el concepto de fuerza como vector y se plantearon problemas extraídos de libros de mecánica vectorial, además de que se fomentó sistemáticamente el uso de Geogebra para representar las condiciones de diversos problemas que se abordaron durante el curso.

En un primer momento del curso, se les plantearon 2 problemas de vectores al grupo de 15 estudiantes, y se les proporcionó un tiempo para su resolución. En esta primera ocasión no se hizo empleo del software, con la finalidad de recuperar información en referencia a sus estrategias de solución a lápiz y papel.

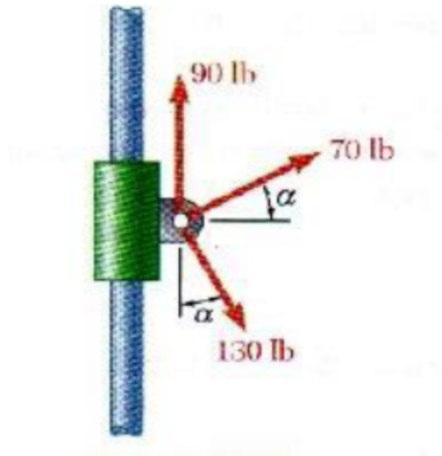
En un segundo momento, a 7 de los participantes en la primera fase, se les volvió a plantear la solución de los 2 problemas vistos, pero en esta ocasión se les permitió usar libremente el software de geometría dinámica. La propuesta o estrategia consistió en emplear el SGD Geogebra para representar los diagramas de cuerpo libre de los problemas por medio de vectores dinámicos, haciendo énfasis en que se debería justificar la validez de los resultados observados en el software, con una solución de tipo analítica.

En esta segunda fase, también se entrevistó a los 7 estudiantes que participaron de la experiencia, para conocer de primera mano sus apreciaciones al respecto del empleo de la herramienta del software en la resolución de los problemas planteados, así como posibilitar el contraste de la actividad de aprendizaje cuando se emplea una herramienta tecnológica, en comparación con la solución tradicional, a lápiz y papel. A continuación, se presentan los enunciados y los esquemas de los problemas seleccionados, tal como aparecen en los libros de texto empleados.

2.1. Enunciado del Primer Problema

Un collarín que puede deslizarse sobre una varilla vertical se somete a las tres fuerzas mostradas en la figura. Determine: a) el valor del ángulo α para que el que la resultante es horizontal, b) la magnitud correspondiente de la resultante. (Beer, Jhonston & Eisenberg, 2007, p. 35)

Figura 1
Primer problema



Fuente: Adaptada (o extraída) de Beer, et, al. (2007)

Es importante resaltar que el enunciado del problema se ha tomado tal cual del libro de texto y que así fue presentado a los estudiantes. Una interpretación de este es que sobre un collarín que es capaz de deslizar libremente sobre una barra vertical, están actuando tres fuerzas de magnitudes conocidas, (90, 70 y 130 libras); de la fuerza de 90 libras es también conocida la dirección (vertical hacia arriba, sin componente horizontal).

De las fuerzas de 70 y 130 libras no se conoce la dirección, pero se sabe que forman el mismo ángulo alfa con la horizontal y vertical respectivamente, y que la incógnita buscada es el ángulo de estas fuerzas, para que el collarín no deslice verticalmente, y que sólo tenga componente horizontal.

De acuerdo con el solucionario del mismo libro de texto, la estrategia esperada para resolver el primer problema es plantear dos ecuaciones a partir de los valores de las componentes rectangulares de los vectores, es decir:

$$\mathbf{70\cos\alpha + 130\sin\alpha = R \ldots\ldots (ec\ 1)}$$
$$\mathbf{90 + 70\sin\alpha - 130\cos\alpha = 0 \ldots\ldots (ec\ 2)}$$

Donde se tiene un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo cual se debe reducir de alguna manera que sea soluble, el libro de texto considera que los estudiantes pueden ser capaces de que a partir de la ecuación (2), se obtenga una ecuación cuadrática para el seno del ángulo y entonces resolverla, con lo cual se podrá hallar el valor de la fuerza resultante a partir de la ecuación (1).

La ruta de solución propuesta por el libro es entonces que a partir de la ecuación (2), ésta se reduzca como sigue usando una identidad trigonométrica:

$$\mathbf{7\sin\alpha - 13\cos\alpha + 9 = 0 \Rightarrow 7\sin\alpha + 9 = 13\sqrt{1-(\sin\alpha)^2} \Rightarrow 49(\sin\alpha)^2 + 126\sin\alpha + 81 = 169 - 169(\sin\alpha)^2 \ldots\ldots (ec\ 3)}$$

Empero, los autores de este artículo consideran que una ruta analítica como la propuesta por el libro de texto, es poco asequible para los estudiantes, además de no explotar diferentes significados y representaciones de la información del problema. Sin embargo, las rutas alternativas como las que podrían encontrarse usando herramientas digitales para explorar el problema, pudieran ser más propicias para su solución.

Con la introducción de un SGD como Geogebra, el problema puede adquirir otro significado, empezando por considerar en cómo representar la información brindada en dicho software. Ya que el ángulo alfa es la incógnita, se puede empezar por crear un deslizador que lo represente, y al tratar de relacionar dicho deslizador con los vectores de 70 y 130 libras, que están orientados ese ángulo medido a partir de la horizontal y la vertical respectivamente, se puede deducir que el ángulo entre ambos vectores, sin importar el valor del ángulo alfa, es un ángulo recto.

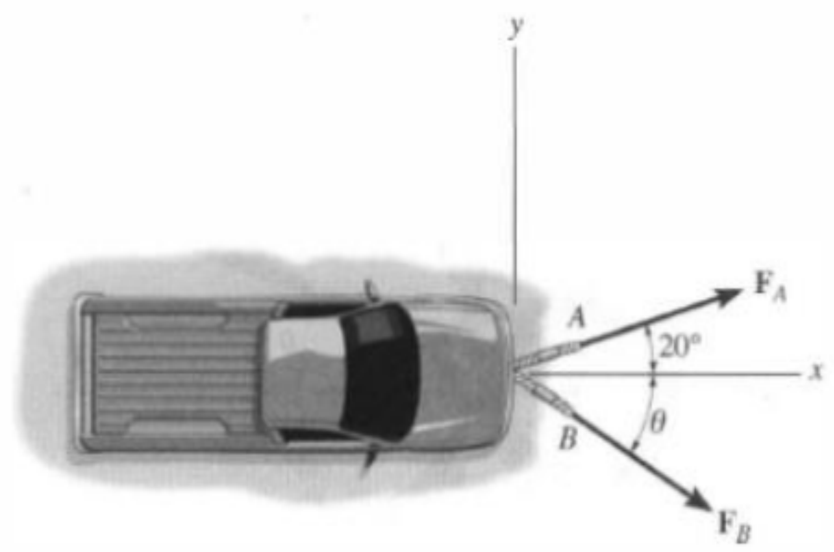
Sabiendo que los vectores de 70 y 130 libras forman entre sí un ángulo recto, una posible estrategia de solución es reducir ambos vectores a uno sólo sumándolos como si fueran componentes rectangulares de otro vector, es decir √(70^2+130^2), luego la componente vertical de este nuevo vector debe ser la que anule al vector de 90 libras que actúa en dirección vertical sobe el collarín. De esta forma, se puede encontrar el ángulo que debe tener la suma de los vectores de 70 y 130 libras respecto a la horizontal, y de ahí, deducir el ángulo alfa; adicionalmente, se obtendría la componente horizontal de ese vector, que equivaldrá a la resultante solicitada por el problema.

¿Serán capaces los estudiantes de encontrar una posible ruta de solución parecida a la anterior con el uso de Geogebra? ¿Serán capaces de encontrar una solución analítica para este problema como lo propone el autor?

2.2. Enunciado del segundo Problema

Un camión va a ser jalado usando dos cuerdas (como se ve en la figura). Si la fuerza resultante va a ser de 950 N dirigida a lo largo del eje “x” positivo, determine las magnitudes de las fuerzas F_A y F_B que actúan en cada cuerda, y el ángulo θ de F_B , de manera que la magnitud de F_B sea un mínimo. (Hibbeler, 2004, p.29).

Figura 2
Segundo problema



Fuente: Adaptada (o extraída) de Hibbeler (2004).

Al igual que en el primer problema, el enunciado tal cual se presenta aquí, que fue tomado del libro de texto, y se propuso para su solución a los estudiantes. El enunciado se puede reinterpretar de la siguiente forma: se quiere arrastrar un camión aplicando dos fuerzas por medio de cuerdas, de una de las fuerzas se conoce la dirección en la cual actúa, 20 grados medidos con la horizontal, pero se desconoce su magnitud; de la otra fuerza se desconoce tanto la magnitud como la dirección. Sin embargo, con la combinación de ambas fuerzas se debe obtener una resultante en dirección horizontal y de magnitud conocida.

Este problema a diferencia de los que comúnmente se proponen a los estudiantes, tiene la particularidad de que el vector resultante está completamente definido y lo que se desconoce son las dos fuerzas que se combinan para obtenerlo, particularmente de una de las fuerzas que se aplican, se desconoce magnitud y dirección, por lo que el problema puede parecer incluso difícil de resolver porque falta información, existe un dato adicional, se pide que una de las fuerzas tenga la mínima magnitud posible.

Siguiendo un razonamiento similar al problema 1, se pueden plantear dos ecuaciones para las componentes rectangulares:

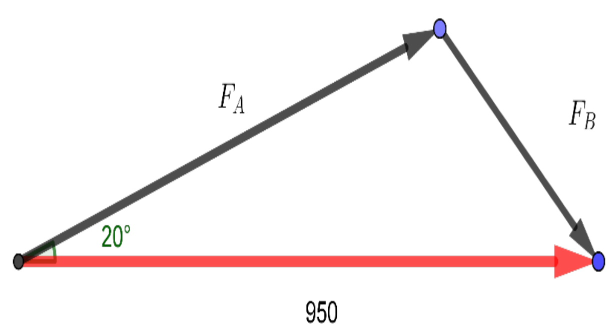
$$\boldsymbol{F_A \cos 20° + F_B \cos \theta = 950} \ldots\ldots (\boldsymbol{ec\ 4})$$
$$\boldsymbol{F_A \sin 20° - F_B \sin \theta = 0} \ldots\ldots (\boldsymbol{ec\ 5})$$

Obteniendo dos ecuaciones con 4 incógnitas, por lo cual la solución analítica se considera poco accesible a los estudiantes, a menos que empiecen a hacer manipulaciones con identidades trigonométricas para tratar de reducir incógnitas.

Aunado a lo anterior, es claro que no se ha podido introducir la condición de que F_B tenga el mínimo valor posible, por lo que la intención de que los estudiantes utilicen en otra etapa Geogebra, es para identificar si son capaces, interactuando con el SGD, de obtener otra interpretación, en este caso geométrica, que les permita resolver el problema propuesto.

Del segundo problema se espera que los estudiantes hagan una representación geométrica de la suma de los vectores F_A y F_B, tal que sumen un vector de 950 N en dirección horizontal, y que por medio del método del paralelogramo o del triángulo para la suma de vectores, intuyan que es posible conocer un lado y los ángulos del triángulo de fuerzas, y que lo que se debe obtener son los otros dos lados, por lo que pudieran usar Ley de senos y/o Ley de cosenos, claro está que para obtener otro ángulo del triángulo deben considerar la idea de que la distancia mínima (magnitud del vector) para el vector F_B será cuando se forme un ángulo recto.

Figura 3
Ruta esperada a seguir en el segundo problema

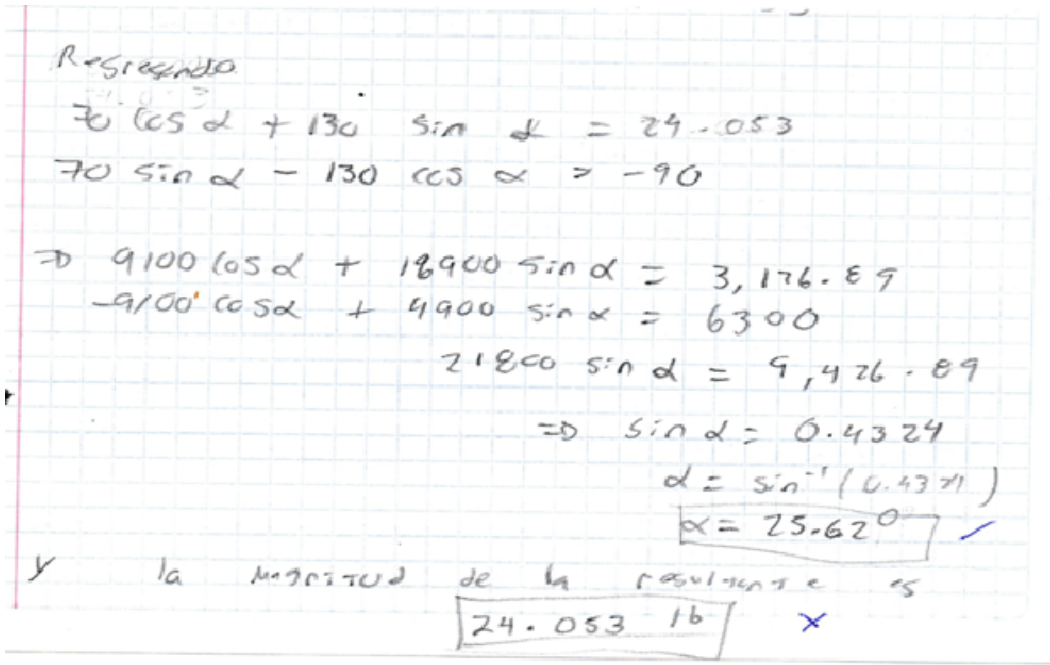


3. Resultados

Los resultados obtenidos se presentan en tres vertientes: i) estrategias de solución empleada a lápiz y papel, ii) estrategias de solución empleadas con el empleo de un SGD y iii) impresiones de los estudiantes al final de la actividad.

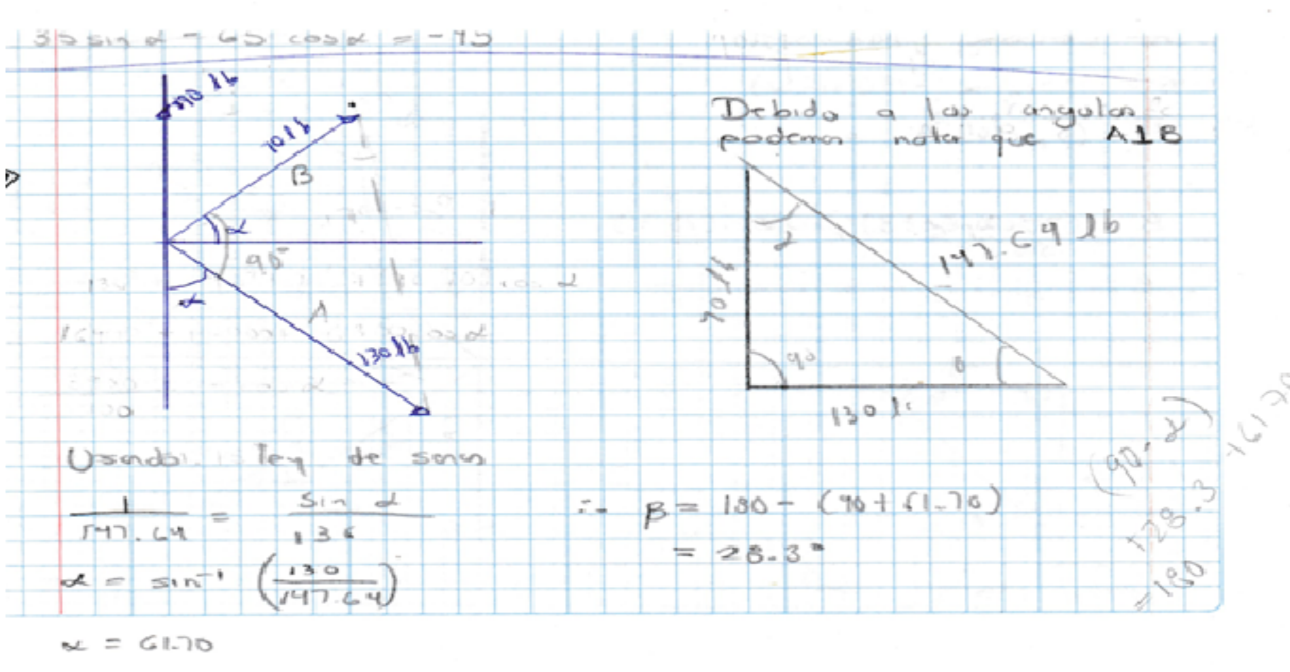
En el caso del primer problema, solamente un estudiante logró plantear y resolver un sistema de ecuaciones para obtener el ángulo alfa, partiendo de un correcto planteamiento de la descomposición rectangular de las fuerzas, y obtuvo un resultado con buena precisión (Figura 4). Sin embargo, no logró determinar correctamente la magnitud de la fuerza resultante.

Figura 4
Solución analítica del primer problema



Una estrategia que siguieron algunos estudiantes consistió en asignar un valor de 90 grados al ángulo que se forma entre los vectores de 70 y 130 libras. No consideraron empero, la condición requerida de que la resultante debía ser una fuerza horizontal (Figura 5).

Figura 5
Intento de solución fallida del primer problema



La estrategia predominante para resolver el primer problema consistió en plantear un sistema de ecuaciones y tratarlo de resolver cuando el problema se propone en el ambiente de lápiz y papel, con algunos esbozos de representaciones geométricas que en general no explotaron.

Para el caso del segundo problema, la mitad de los estudiantes ni siquiera intentaron hacer una representación gráfica de las condiciones, el resto planteó diversas estrategias, desde un sistema de ecuaciones que no pudo resolver, asignarle valores arbitrarios al ángulo desconocido e incluso hubo quien consideró que debería proponer una función para la magnitud del vector F_B y tratar de minimizarla empleando herramientas del cálculo diferencial, debido a que se menciona en el problema, que debe ser un valor mínimo, en ningún caso se concretó alguna solución aceptable.

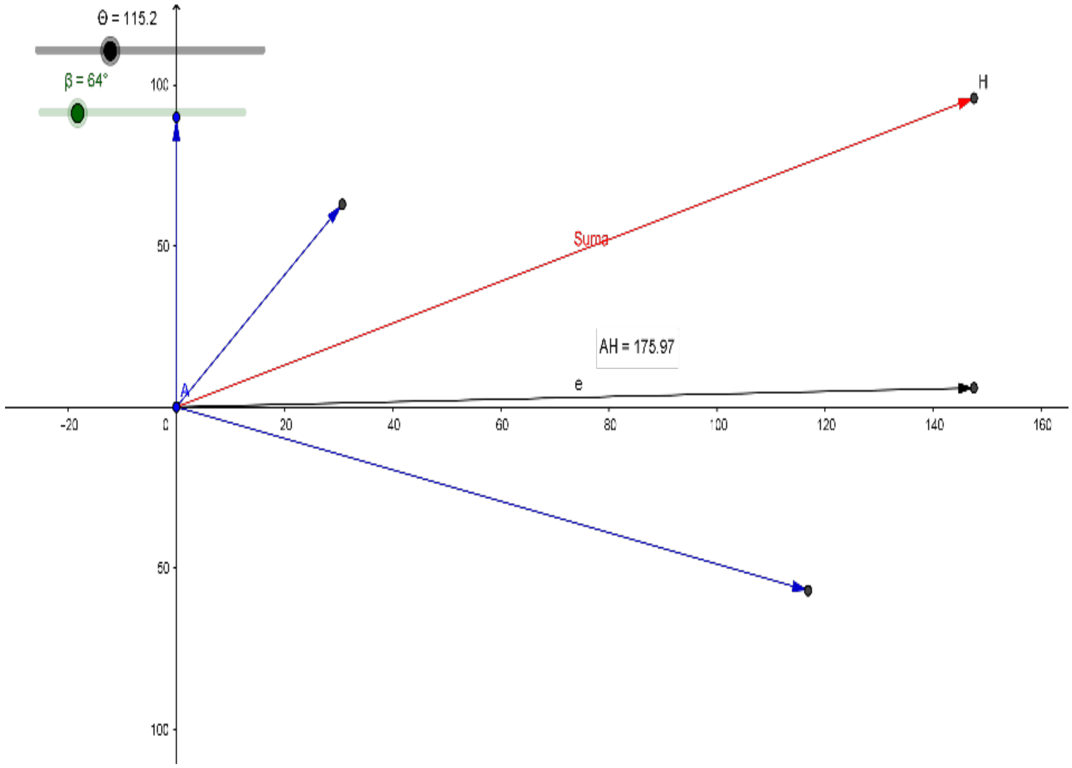
Con base en estos resultados se considera que resulta difícil para el alumno plantear una estrategia que estructure diferentes saberes previos, y que durante un proceso de resolución a lápiz y papel se ponen de manifiesto algunas cuestiones que son difíciles de vislumbrar. Por ejemplo: ¿es posible que el estudiante identifique que la noción de fuerza mínima está relacionada con el ángulo que debe existir entre la resultante y una de las fuerzas de las cuerdas? ¿En qué condiciones la resultante obtenida es la menor posible?, ¿existen otros posibles resultados que cumplan las condiciones propuestas en el enunciado del problema?

En el problema, referente al collarín que se desliza a lo largo de una barra fija, además de conocer sobre las distintas relaciones trigonométricas , debe identificar correctamente la variable incógnita en la ecuación cuadrática que surge al intentar partir de una sola ecuación a saber, la sumatoria de fuerzas en el eje y, en este caso identificamos la dificultad en el trabajo con ecuaciones cuadráticas, además de suponer que el estudiante logre visualizar que la variable cuadrática misma se refiere al valor de una función trigonométrica, lo que en sí mismo no tiene un significado inmediato.

En la segunda etapa, como se mencionó párrafos atrás, se solicitó a un subgrupo de 7 estudiantes que habían intentado resolver los problemas a lápiz y papel, que ahora lo intentaran resolver usando el SGD Geogebra, dado que los estudiantes tenían antecedentes en el uso de esta herramienta digital, fueron capaces de construir modelos dinámicos en los que emplearon comandos para representar vectores, deslizadores para modificar valores de variables o incógnitas que ellos consideraron de interés, así como el comando para rotar una recta un ángulo dado.

El uso de Geogebra permitió a la mayoría visualizar qué posibles valores de las incógnitas podían satisfacer las condiciones de cada problema, sin embargo, a partir de encontrar dichos valores tras hacer modelos en el software, no consideraron que fuera necesario justificar analíticamente esas observaciones. Se han rescatado los protocolos de construcciones dinámicas que 2 estudiantes elaboraron para tratar de encontrar posibles soluciones.

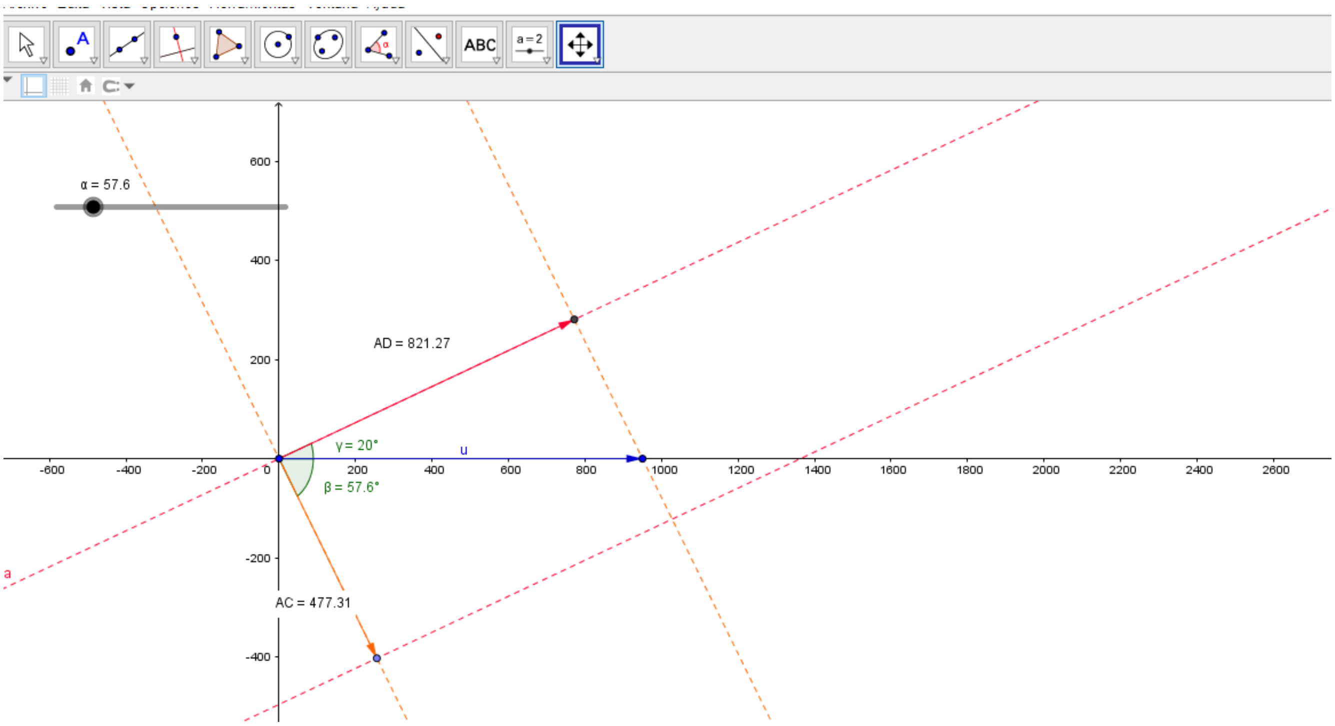
Figura 6
Propuesta de solución del primer problema



La figura 6 corresponde a una vista de la construcción dinámica elaborada por un estudiante al tratar de resolver el problema 1, llama la atención que trabajó con los valores reales de los vectores, es decir, con 90, 70 y 130 libras respectivamente, optó por escalar los ejes para poder visualizar este rango en las magnitudes de los vectores, en lugar de escalar dicha norma o magnitud, por ejemplo a una escala en la 1:10 en la que pudiera trabajar con vectores de 9, 7 y 10 unidades de magnitud. Esto es un indicio de que no es capaz de utilizar un concepto previo que es la multiplicación de vectores por escalares.

La construcción es confusa, propone dos deslizadores como ángulos, pero sólo uno está asociado a la construcción, además no fue capaz de identificar la perpendicularidad ya mencionada anteriormente entre los vectores de 70 y 130 libras, en general la construcción se considera fallida.

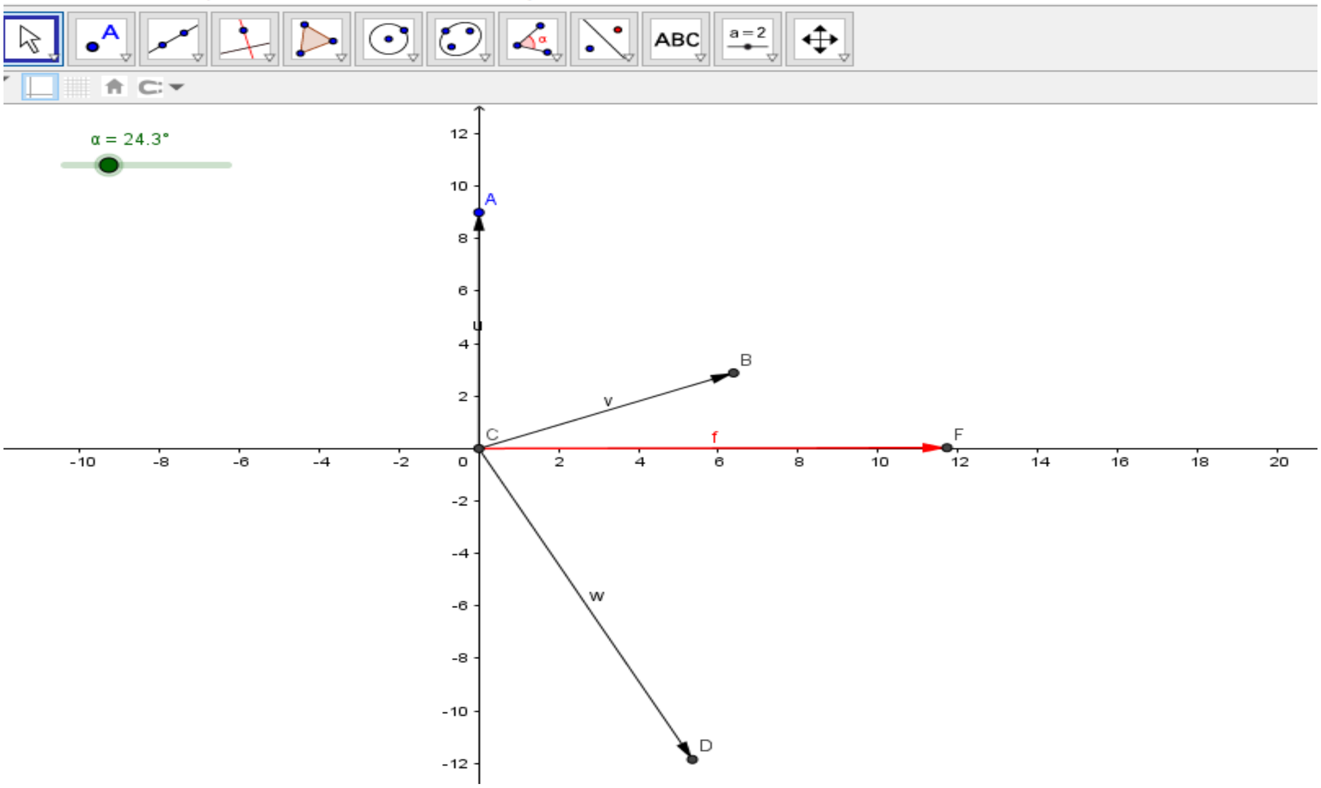
Figura 7
Construcción dinámica para el segundo problema



El mismo estudiante que tuvo un intento fallido con el SGD para representar las condiciones de primer problema, tuvo mejores resultados al proponer una construcción para el problema 2, Figura 7, aunque nuevamente opta por escalar los ejes, en lugar de escalar las magnitudes de los vectores, ahora utiliza adecuadamente el deslizador para controlar el ángulo alfa, representa la información que el problema le proporciona, incluyendo que mantiene fija la resultante de 950 en dirección horizontal, por lo cual descubre por medio del método del paralelogramo, que existen muchas parejas de vectores F_A y F_B que al ser sumadas dan la resultante buscada, respetando además la dirección de 20 grados de F_A, entonces empieza a modificar el ángulo alfa, hasta observar para qué valores la magnitud de F_B se vuelve mínima. Se considera que encontró una ruta de solución acertada, pese a no justificar analíticamente sus observaciones.

Se revisa ahora el protocolo de construcción de otro de los participantes que también se pudo recuperar al final de la sesión.

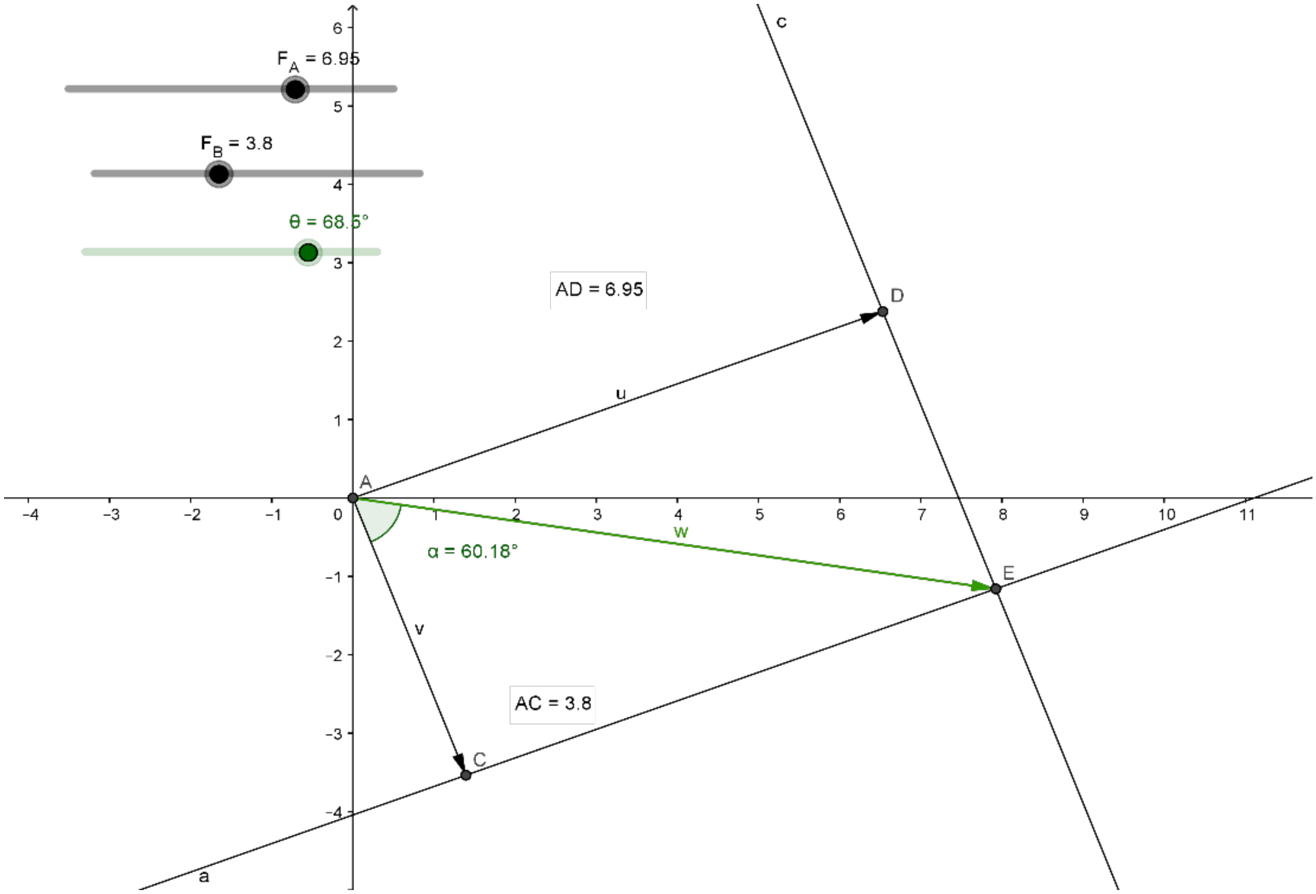
Figura 8
Protocolo de construcción del primer
problema de otro estudiante



En la figura 8 se presenta una vista de la construcción dinámica elaborada por otro de los participantes para resolver el problema 1, en este caso, se puede notar que es capaz de identificar que puede usar una escala 1:10 para las magnitudes de los vectores de 90, 70 y 130 libras, y está seguro que el ángulo que le permita cumplir las condiciones de una resultante horizontal, será la solución buscada.

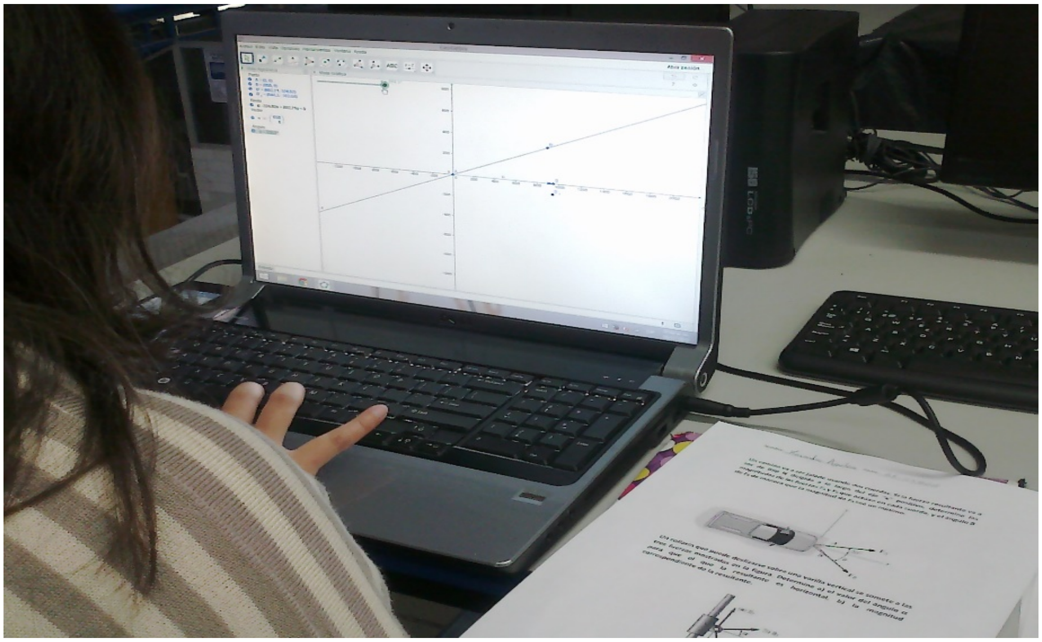
Descubre que los vectores de 70 y 130 deben ser perpendiculares y así los construye, posteriormente realiza la suma geométrica de los 3 vectores y modifica el deslizador del ángulo hasta que obtiene una resultante sin componente vertical, es entonces que concluye que el ángulo buscado es aproximadamente 24.3º. Aunque no termina de hacer una justificación formal, se considera que este estudiante fue capaz de transitar por una ruta alterna de solución a la que el autor del libro de texto propone.

Figura 9
Protocolo de construcción del segundo problema por otro estudiante



El mismo estudiante que construyó adecuadamente un modelo en Geogebra que le permitió hallar el ángulo para el primer problema, presentó una construcción dinámica para el segundo problema, Figura 9, que resulta ser más sofisticada que la analizada anteriormente (Figura 7); se puede observar en su protocolo de construcción que fue capaz de usar deslizadores no sólo para el ángulo solicitado, sino que también usó deslizadores para modificar las magnitudes de los vectores F_A y F_B; a diferencia del otro estudiante, él no fija la resultante de 950 en el eje horizontal, su estrategia de solución es ir modificando los valores del ángulo y de las magnitudes de los vectores, hasta encontrar una resultante que satisfaga las condiciones; en este sentido, aunque es más elaborada su construcción, es menos eficiente que la presentada en la Figura 7, pues no es capaz de observar que existen muchas parejas de vectores F_A y F_B que pudieran satisfacer la condición de la resultante, y que en consecuencia el dato de que F_B debe ser de valor mínimo, es una condición adicional que discrimina una solución única.

Figura 10
Estudiante iniciando la representación
de las condiciones del problema.



A continuación se comparten extractos de las entrevistas (siete) que se les hicieron a los estudiantes participantes de la fase de resolución con SGD, con la siguiente codificación: E: entrevistador; A1, A2, A3, A4,A5, A6 y A7: participantes.

E: ¿Qué dificultades encontraste la primera vez que fue a lápiz y papel, al resolver los problemas, en comparación con esta ocasión?

> A1: Yo creo que con este programa tuvimos una ventaja, porque usamos deslizadores, entonces tenemos como rangos en dónde la variable se está moviendo y podemos estar verificando los valores y viendo lo que nos da, en cambio a lápiz y papel si es como más analizar lo que tienes que hacer y más cuentas, en cambio aquí una variable la podemos poner como un deslizador, en cambio en lápiz y papel siempre es encontrar la incógnita.
>
> A2: Tuve mayores dificultades con el problema dos, porque me salían varias ecuaciones con varias incógnitas, entonces tuve una confusión y no me acordé de cálculo, porque teníamos que sacar un mínimo. En el primer problema, malinterpreté el problema, porque no me había dado cuenta que no lo veía geométrico, lo quería ver todo analítico, y aparte tuve equivocaciones en mis cuentas y en los signos.
>
> A3: Encontrar los valores y plantear los problemas, porque sí los planteaba pero…llegaba a las identidades y no las veía tan fácil… llegaba a expresiones con varias variables.
>
> A5: Llegaba a expresiones donde no conocía diversos datos, ni fuerzas ni algunos de los ángulos, eso se me hizo difícil.
>
> A7: Algunos conceptos que se me olvidaron.

En este caso, la estudiante A1 refirió haber tenido menos dificultades con el empleo del software, sobre todo para resolver satisfactoriamente el primer problema. Con respecto a los conocimientos puestos en juego para su solución a lápiz y papel, la misma estudiante señaló que se le hizo difícil hallar una fuerza F_B mínima, y que asoció en tal caso la idea de derivada, pero no supo cómo plantearla, situación que le resultó más familiar con el empleo del software.

E: En la segunda parte, que es cuando ya tratas de resolverlos con el uso del software, ¿pudiste hacer una representación de las condiciones del problema con el software?, ¿lograste llegar a resultados satisfactorios?, ¿crees haberlos podido resolver

> A2: en el primer problema sí, en el segundo tuve un poco confusión porque me salía un pequeño intervalo en el que el ángulo era igual, y la magnitud de cierto vector variaba, pero variaba muy poco… Tuve la idea de hacerlo con deslizadores, y entonces vi que el problema coincidía en un solo punto, y entonces ya eso es lo que tomé como resultado.

> A4: resulta más fácil, porque con la ayuda de los deslizadores ya se puede ir viendo, vamos moviendo porque lo animamos y ya vamos viendo cómo pueden ser las distintas situaciones.

> A5: Llegué al resultado que yo necesitaba, y además me resultó más fácil. Y el software me permitió llegar a los resultados y después intentar verificarlos a lápiz y papel.

> A la pregunta sobre los conocimientos y habilidades previos que consideran necesitar para la resolución de este tipo de problemas, sobre todo a lápiz y papel, se tiene también la opinión de varios de ellos.

> A2: propiedades de los vectores, como sacar la norma, era también interpretar la geometría, si tenías un triángulo era saber usar identidades trigonométricas y pues también saber resolver sistemas de ecuaciones. Es más para mí un mínimo se saca con derivada, entonces también manejar un poco de cálculo.

> A3: Fueron los vectores, las normas de los vectores, las fuerzas, las sumas de vectores, obtención de las componentes de un vector.

> A7: la suma de vectores, el tratamiento algebraico para resolver las ecuaciones, ese tipo de cosas.

En torno a las potencialidades del software empleado, se les preguntó si con el empleo del programa lograron representar satisfactoriamente desde el punto de vista de toda la información los 2 problemas, y si se cumplían las condiciones que se necesitaban para resolverlos, a lo que todos los estudiantes entrevistados respondieron positivamente. En concreto, al referirse a la representación gráfica que se logra con el software, y sus diferencias con una representación a lápiz y papel:

> A2: En una hoja no puedes modificar condiciones tan fácilmente como en el software, porque en el software le puedes mover ciertas cosas, mientras que a lápiz y papel haces demasiados trazos y puedes confundirte.

> A5: En realidad no tuve ningún problema para representar ambos problemas, para algunas variables podríamos simplemente crear un deslizador y ya con eso podemos plantear todos los problemas.

> Al cuestionarles cuáles consideraban qué eran los conceptos o puntos clave que permitirían avanzar más en la solución de ambos problemas.

> A3: En el segundo problema sí sospechaba que debían de formar un ángulo recto, y ya después de las operaciones y todo eso, pues sí llegué a que tenían que tener un ángulo recto, el que nos daba de 20 y el que teníamos que encontrar que era de 70. En el primero los conocimientos de trigonometría.

> A5: Bueno la verdad es que sí, hubo algo que la verdad no había tomado mucho en cuenta, por ejemplo en el segundo problema, cuando ya nos había dado un ángulo, lo que se necesitaba era calcular la fuerza

paralela a la fuerza que ya teníamos. En el primer problema ya hasta después había notado que el ángulo entre dos de las fuerzas era recto, que nunca cambiaba. Entonces si me hubiera dado cuenta me hubiera resultado más sencillo desde el inicio.

A6: En el segundo problema era entender que era eso de que la fuerza F_B debía ser mínima. Y en el primer problema que al menos un par de los vectores debían ser ortogonales entre sí.

Este último estudiante refirió incluso que él solo se percató de dicha condición de ortogonalidad hasta que empleó el software, y que una vez que se dio cuenta, entonces procedió a determinar con mayor facilidad el valor del ángulo solicitado.

En términos generales, los estudiantes opinaron que se les presentaron mayores dificultades cuando abordaron los 2 problemas, sin ayuda de la herramienta digital; en segundo lugar, los distintos comandos de los que dispone el propio software (como la creación de deslizadores para las variables), permitieron una adecuada representación de los elementos y condiciones que conforman el enunciado de cada problema, lo que de entrada permitió no solo un registro de representación más sólido, sino un mejor punto de partida para realizar el análisis, esto es, encontrar relaciones, variantes, invariantes, e incluso probar conjeturas; por último, el SGD empleado tuvo una función como reorganizador cognitivo, debido a que la mayoría de los estudiantes identificó algún concepto o condición clave que le permitió continuar con la resolución de forma satisfactoria, encontrando en los dos casos los valores de las fuerzas y ángulos solicitados.

Resulta notorio, sin embargo, que uno de los procesos más difíciles para los estudiantes, sigue presentándose en la solución analítica de los sistemas de ecuaciones que se obtienen al realizar el análisis de las fuerzas involucradas. ¿Por qué afirmamos lo anterior? En los resultados fue manifiesto que la herramienta tecnológica permitió que los estudiantes pudieran arribar a razonamientos basados en aproximaciones visuales y empíricas, como lo demuestra la afirmación de varios de ellos en torno al requerimiento del ángulo recto entre 2 de las fuerzas de 70 y 130 libras involucradas en el problema 1, o el caso de la dependencia de ambas fuerzas (F_A y F_B) con respecto al ángulo θ en el segundo problema.

Sin embargo, la obtención de tales conjeturas en un entorno de empleo de herramientas digitales, no fueron suficientes para la elaboración de pruebas algebraicas, tal como lo plantean diversos autores (Barrera y Reyes, 2013). Para que un SGD como el empleado en esta actividad, pueda considerar un reorganizador cognitivo, se requeriría integrar tanto los elementos de razonamiento geométrico como los algebraicos. En una visión más integral, se hablaría de 3 tipos de argumentos: algebraicos, empíricos y analíticos. Para Arcavi (2003) sin embargo, la mayoría de los aprendices fundamentan más sus razonamientos en las representaciones visuales.

4. Conclusiones

Cuando los estudiantes utilizan de forma sistemática las tecnologías digitales pueden acceder a representaciones dinámicas que les permitan entender aspectos de un problema que parecieran ocultos cuando éstos se tratan de resolver a lápiz y papel únicamente.

Un problema clásico, cuya solución puede darse con apenas una representación gráfica de los elementos que intervienen, se puede extender con el uso de herramientas digitales, al conectar ideas de diferentes áreas de las matemáticas, tal como el cálculo, la geometría y la trigonometría.

La implementación de una tarea de aprendizaje matemático que incluya la utilización de un software de geometría dinámica como el descrito en este caso, puede permitir una reorganización cognitiva (Pea, 1985) en torno a los conceptos previos relacionados, y contribuir de esta manera a enriquecer una actividad en el aula de matemática.

Un pendiente relevante al emplear una herramienta tecnológica para la enseñanza de tópicos matemáticos como los ejemplificados en la presente propuesta, es dar cuenta de la integración de los argumentos visuales y empíricos que puede ofrecer esta alternativa, con los argumentos analíticos, esto es, la elaboración de pruebas de naturaleza algebraica para complementar las conjeturas que se pueden derivar de las representaciones ofrecidas por el software.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241. doi: https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. International Journal for Computers for Mathematics Learning, 5, 25-45. doi: https://doi.org/10.1023/A:1009841817245

Álvarez-Gayou, J. L. (2005). ¿Cómo hacer investigación cualitativa? Fundamentos y metodología. México: Paidos Educador.

Barrera, F. y Reyes, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments. The mathematics Enthusiast, 10 (1), 109-136. https://publons.com/publon/10909545/

Bayazit, I. (2006) Task Selection and Task Implementation: Seven Constraints Affecting the Teacher's Instruction, in Hewitt, D. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Matehmatics. (vol. 26, pp. 23-28). Recuperado https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-26-1-5.pdf

Beer, F., Jhonston, E. & Eisenberg, E. (2007). Mecánica Vectorial para Ingenieros, Estática. México: McGraw-Hill Interamericana.

Campos, M. y Torres, A. (2017). Las Tareas de Aprendizaje en la Enseñanza de las Matemáticas a Distancia. Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia, 9(17), 141-149. doi: http://dx.doi.org/10.22201/cuaed.20074751e.2017.17.64975

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) Investigaciones en matemática educativa II, (pp.173-201) México: Grupo editorial Iberoamérica

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). Research Methods in Education. London: Routledge Falmer.

Denzin, N. & Lincon, Y. (2003). Collecting and Interpreting Qualitative Materials. London: Sage Publications.

Hibbeler, R. C. (2004). Mecánica Vectorial para Ingenieros, Estática. México: Pearson.

Isoda, M. Y Olfos, R. (2009). El Enfoque de Resolución de Problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ortega, F. Reyes, A. Y Vargas, V. (2017). Formas de razonamiento de profesores de bachillerato al resolver problemas sobre lugares geométricos con Geogebra. En Actas de Tópicos Selectos de Educación en CITeM. Cristobal Escalante et al coordinadores.

Pea, R.D. (1985). Beyond Amplification: Using the Computers to Reorganize Mental Functioning. Educational Psychologist, 20(4), 67-182.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. ZDM, 39, 523-536.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando, Florida: Academic Press.

Stein, M., Remillard, J. & Smith, M. (2007). How curriculum influences students learning. In F. Lester (Ed), Second Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 319-369). New York: Macmillan.

Stein, M.K. & Smith, M.S. (1998) Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268-275.