ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

EDUCACIÓN • EDUCAÇÃO • EDUCATION

Vol. 40 (Nº 19) Año 2019. Pág. 23

La integración numérica en la integral definida: caso de estudio

The numerical integration in the defined integral: Case Study

PEÑA, Carlos A. [1]; RAMIREZ-SÁNCHEZ, María [2] y RIVAS-TRUJILLO, Edwin [3]

Recibido: 20/03/2019 • Aprobado: 18/05/2019 • Publicado 10/06/2019

Contenido

RESUMEN:
Este artículo tiene como objetivo mostrar la utilidad del concepto de integración numérica como alternativa para el cálculo de integrales definidas en situaciones en las que las técnicas de integración pueden resultar insuficientes o complejas, o aquellas en las que con datos tabulados (sin función explícita) dan cuenta de un proceso de integración. Para esto de aplicaron y analizaron algunas situaciones contextualizadas referenciadas a aspectos geométricos donde su desarrollo se basara en el cálculo de áreas bajo la curva.
Palabras clave: Aproximación numérica, cálculo de áreas, descomposición en rectángulos, integral definida

ABSTRACT:
The objective of this article is to show the usefulness of the concept of numerical integration as an alternative for the defined integrals in situations which integration techniques may be insufficient or complex, or those in which tabulated data (without explicit function) are explained by an integration process. For this, they were applied and analyzed some contextualized situations referenced to geometric aspects where their development was based on the calculation of areas under the curve.
Keywords: Numerical approximation, areas calculation, rectangle decomposition, definite integral.

1. Introducción

Históricamente la integral definida ha sido abordada desde la perspectiva de calcular el área de una región por el método de exhaución (agotamiento), aplicar las sumatorias de Riemann y emplear el Teorema Fundamental del Cálculo, lo cual permite establecer el vínculo entre la integral indefinida y la definida. Para los estudiantes puede resultar adecuado trabajar con la integral indefinida luego de hacer una revisión previa de la integral definida (Boigues, Llinares, & Estruch, 2010). Sin embargo, muchos de los "problemas" que se trabajan al interior del aula de clase de un curso regular de cálculo integral tienen un gran componente en el desarrollo de las técnicas de integración (sustitución básica y trigonométrica, por partes, por fracciones parciales…). Mora 2015 enuncia que si no hay éxito en la búsqueda de la antiderivada no se tendría claridad si hay un error en el proceso (aplicación de alguna técnica de integración) o, por el contrario, la antiderivada no se puede expresar en términos de funciones elementales. Por ende los estudiantes en una etapa inicial, evidencien dificultades en el proceso de resolver una integral definida cuya antiderivada no se puede expresar en términos de funciones elementales. Se pueden utilizar procesos alternos que pueden ser abordados desde los métodos numéricos (integración numérica: regla de trapecios y regla de Simpson) que permitan soluciones numéricas a diferentes situaciones que involucren el cálculo de integrales definidas (Nakamura, 1992).

2. Metodología

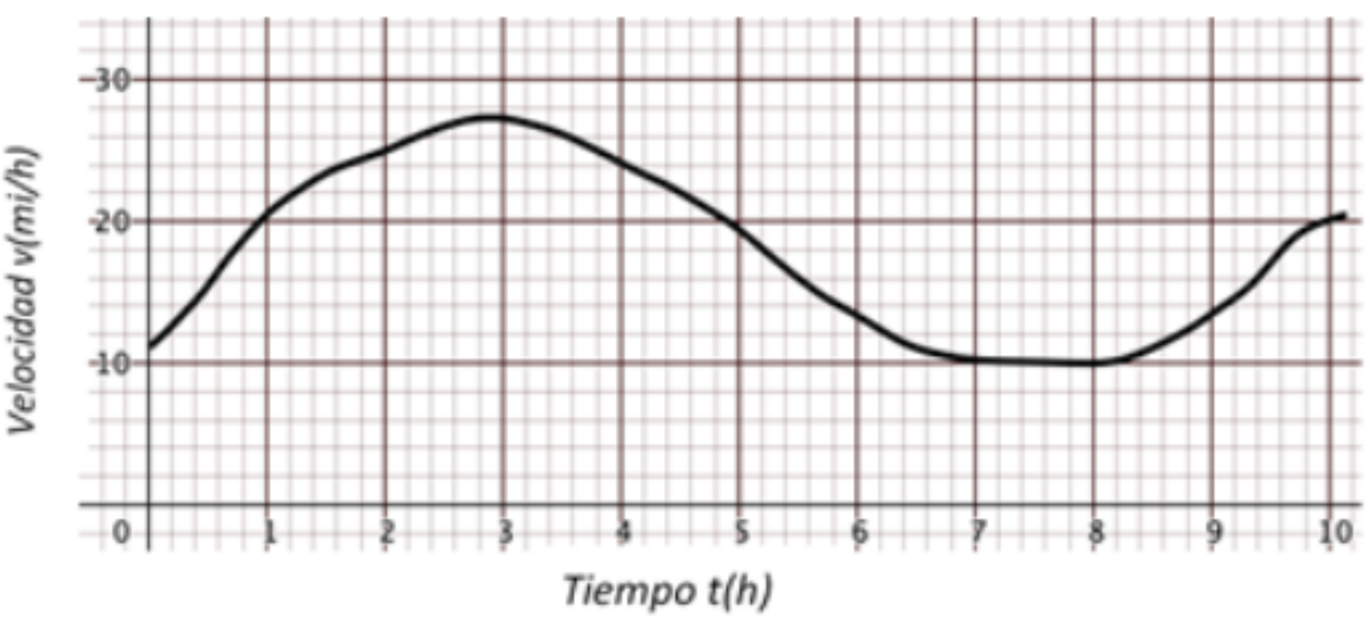
Se abordó el concepto de integral definida a partir de medición de áreas de regiones fundamentadas en el método de exhaución, aplicación de las sumas de Riemann para aproximar áreas, contraste entre integración numérica - teorema del cálculo y problemas de aplicación que requieran integración numérica. El objetivo fundamental de la prueba fue problemas contextualizados de aplicación de la integral definida con la variante que la función que se debía integrar se presentaba o en forma gráfica o en forma tabulada. Su desarrollo fue implementado en 38 estudiantes de Ingeniería Catastral y Geodesia de primer semestre de la asignatura cálculo integral de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, trabajando en primera instancia en forma grupal y luego en plenaria exponiendo los razonamientos usados para formalizar los conceptos trabajados. Los retos de los estudiantes consistían en identificar que la solución del problema se obtenía a través de una integral definida y determinar cómo estimar el valor de dicha integral.

2.1. Actividades aplicadas

2.1.1. Medición de distancias del crucero

Los instrumentos de un crucero que viajó en una expedición por aguas del océano Caribe entre la Guajira y Panamá registraron la velocidad v(t) (medida en mi / h) durante las 10 horas que duró el trayecto y generaron el reporte gráfico de la figura 1.

Figura 1
Gráfico tiempo (h) / velocidad (mi/h)



1- ¿Cómo estimaría la distancia recorrida por el crucero según el reporte que arrojaron los instrumentos de medición? Descríbala.

2- Estime la distancia recorrida por el crucero durante el periodo de 10 horas, de t=0 a t=10

2.1.2. Área de un terreno: quebrada, camino y carretera

Los estudios de suelos concluyeron que dos tramos rectos, uno de carretera y otro de un sendero peatonal (los cuales se intersecan en ángulo recto) delimitan junto con una quebrada un terreno propicio para la construcción de una zona residencial. El ingeniero encargado para calcular el área delimitada toma las medidas (en metros) desde el sendero peatonal hasta la quebrada y las registra en la tabla 1, donde x representa la longitud de los espaciamientos a lo largo del sendero y la distancia hasta la quebrada:

Tabla 1
Longitud / distancia en metros

x	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
y	125	125	120	112	90	90	95	88	75	35	0

1- Dibuje un croquis (aproximado) de la región geográfica que está delimitada.

2- Determine una serie de pasos que le permita calcular el área del terreno delimitado y luego úsela para calcularla.

3- ¿Cree que necesita alguna información extra para determinar el área del terreno? ¿Por qué?

2.1.3. Construcción de parques en Bogotá

Como parte de la recuperación de algunas zonas ambientales en Bogotá, se ha planeado construir un parque en un potrero según se muestra en la vista aérea de la figura 2.

Figura 2
Vista aérea de la región

Fuente: GOOGLE MAPS

La región que está prevista aprovechar es aquella que está encerrada en el recuadro amarillo de la figura 2. Sin embargo, existe una hondonada (recuadro amarillo interno) con una profundidad media de 2 m sobre la cual se quiere construir un lago. Tomadas las medidas de la hondonada por parte de los encargados, de forma perpendicular a un eje horizontal (paralelo a uno de los lados más largos de la zona), con un espaciamiento horizontal de 3m se ha obtenido la información de la Tabla 2.

Tabla 2
Longitud / distancia en metros

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
y	0	6	7	8	10	8	7	4	6	4	5	4	2	1	0

¿De qué manera se podría calcular el volumen aproximado de agua necesario para rellenarlo? Explique su proceso y estime numéricamente su volumen.

Nota: Describa (si las hay) las dificultades encontradas en la solución de la situación, ¿la información es suficiente?

Figura 3. Representación aproximada de la hondonada

Fuente: Elaboración propia

2.2. Interpretación y Análisis de resultados

Para facilitar el análisis en cada problema, las soluciones se agruparon en tres tipos de "razonamiento" (Tipo I, Tipo II y tipo III).

2.2.1. Medición de distancias del crucero

Para estimar la distancia recorrida, el grupo de estudiantes uso uno de los siguientes tipos de razonamiento:

Tipo I

Usan la relación entre las variables tiempo y velocidad dada por la ecuación:

$v = \frac{d}{t}$ y calculan la distancia total recorrida como la suma de las distancias recorridas en intervalos de 1 hora, para lo cual usan valores aproximados de la velocidad tomados de la gráfica.

Tipo II

Determinan que la distancia total recorrida corresponde al área de la región limitada por la curva de la velocidad y el eje horizontal (t) en el intervalo [0,10]. Para la estimación, descomponen la región en rectángulos de igual base (generalmente de 1 unidad) y toman como altura la imagen, ya sea del extremo izquierdo o derecho, de cada subintervalo (la más fácil de leer en el gráfico) y suman las áreas de todos los rectángulos.

Tipo III

Concluyen que la distancia total recorrida por el crucero corresponde a la longitud de la curva y, para obtenerla, aproximan la curva por una poligonal y utilizan la fórmula de la distancia entre puntos y los datos dados en la gráfica.

La tabla 3 resume el número de estudiantes y el porcentaje de ellos que usa alguno de los razonamientos descritos:

Tabla 3
Sistematización situación 1

RESPUESTAS	Cantidad de estudiantes	%
TIPO I	18	47
TIPO II	14	37
TIPO III	6	16

Un 47 % usó el razonamiento tipo I, es decir el que determina la relación física entre las variables distancia *(d)*, velocidad *(v)* y tiempo *(t)*. Dado el conocimiento de dos de los tres valores (datos extraídos de las coordenadas t y v en la gráfica), del despeje en la ecuación $d = vt$ se obtiene la distancia recorrida en cada intervalo (puede ser de 1 hora de longitud) y finalmente se aproxima la distancia total recorrida por el crucero como la suma de todas estas distancias.

Es de notar que, en este proceso, algunos estudiantes optaron por tomar particiones más finas, es decir con más subintervalos, por ejemplo, de longitud ½ hora para que la aproximación fuera más precisa.

Un 37% de los estudiantes usó el razonamiento tipo II, es decir la descomposición de la región bajo la curva en regiones geométricas de área conocida. La más común: los rectángulos cuya base se mantenía constante según la división del eje *t* en intervalos de 1 horay la altura como la imagen ya sea del extremo izquierdo o derecho de cada subintervalo (la más fácil de leer en el gráfico) y el área total o sea la distancia recorrida como la suma de las áreas de todos los rectángulos.

Un 16% de los estudiantes usó el razonamiento tipo III, es decir la relación pitagórica para obtener la distancia entre dos puntos a través de la adecuación de triángulos rectángulos de tal forma que la hipotenusa coincidiera con la curva como ajuste de la misma en pequeños subintervalos para así calcular aproximadamente la longitud de la curva a la que erróneamente asociaban con la distancia recorrida por el crucero.

2.2.2. Área de un terreno: quebrada, camino y carretera

Para la representación del croquis de la región, todos utilizaron el plano cartesiano e hicieron coincidir el sendero peatonal con el eje x y la carretera con la recta $x = 1000$.

Para la descripción de los pasos que permitiera el cálculo del área se tuvieron los siguientes razonamientos:

Tipo I

El área de la región se aproximó sumando las áreas de los rectángulos inscritos que se pueden trazar tomando como base cada subintervalo de longitud 100 y altura la imagen del extremo izquierdo de cada uno de los 10 subintervalos.

Tipo II

El área de la región se aproximó sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos con el fin de acotar de manera más precisa el área real delimitada por las condiciones del problema.

Tipo III

El área de la región se aproximó sumando las áreas de los rectángulos inscritos, más el área de los triángulos rectángulos que cubren la región no considerada en los rectángulos.

La tabla 4 resume el número de estudiantes y el porcentaje de ellos que usa alguno de los razonamientos descritos:

Tabla 4
Sistematización situación 2

RESPUESTAS	**Cantidad de estudiantes**	**%**
TIPO I	22	58
TIPO II	4	11

TIPO III	12	32

En los tres tipos de razonamiento lo común fue estimar el área de la región a través de la descomposición de la región en formas rectangulares o triangulares (es decir usando el método de exhaución empleado por Arquímedes) y también usando los planteamientos de las sumas de Riemann para obtener aproximaciones por defecto y por exceso, ya sea con rectángulos inscritos o circunscritos. La diferencia central en los razonamientos estuvo marcada en el número de subintervalos considerados y en el número de figuras geométricas que recubren la región.

Con respecto a la necesidad de contar con información extra para solucionar la situación, aproximadamente un 80% de los estudiantes consideran que dado que uno de los lados que limita el terreno es "irregular", para obtener una mejor aproximación del área del terreno sería conveniente contar con más datos para que el planteamiento y su posterior solución sea mucho más aproximada.

De la misma forma se evidenció la necesidad de tener una función que modelara las mediciones realizadas en la situación con el fin de calcular una antiderivada y por medio del teorema del cálculo evaluar y tener el valor del área. Sin embargo, se hizo la anotación que existía la posibilidad que la función que modelara los datos podía ser o no una función que tuviera primitiva elemental.

2.2.3. Construcción de parques en Bogotá

Para estimar el volumen, el grupo de estudiantes usó uno de los siguientes tipos de razonamiento:

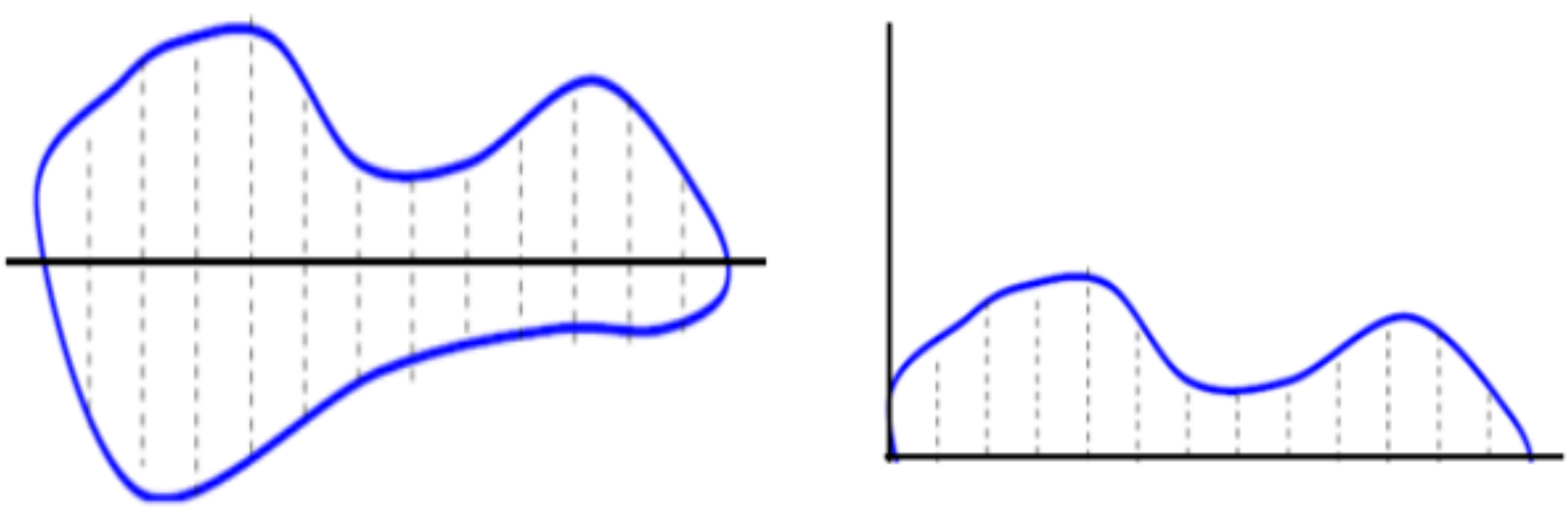
Tipo I

Aproximar el área de la región plana como sumatoria de áreas de algunos de los rectángulos que la recubren, para lo que consideran como base segmentos de longitud 3 y como altura los valores de y registrados en la tabla y luego el volumen multiplicando el área obtenida por la profundidad media.

Tipo II

Se trazan un sistema coordenado y en él ubican la región plana de tal forma que el eje x divida la región aproximadamente en dos de la misma área (es decir, detectaron una especie de *simetría*) y la usan para simplificar los cálculos, pues así sólo calculan -usando el mismo razonamiento descrito en el Tipo I- la mitad del área y la multiplican por la profundidad media y luego por dos para determinar el volumen.

Figura 4
Representaciones provistas por los estudiantes



Representación de la horizontal

Representación en el plano cartesiano

La tabla 5 resume el número de estudiantes y el porcentaje de ellos que usa alguno de los razonamientos descritos:

Tabla 5
Sistematización situación 3

RESPUESTAS	Cantidad de estudiantes	%
TIPO I	26	68
TIPO II	12	32

3. Conclusiones

En todas las situaciones presentadas en el diagnóstico, se evidenció la necesidad del uso de la descomposición de las regiones irregulares en figuras regulares (rectángulos y algunas veces triángulos rectángulos) con el fin de tener una aproximación lo bastante cercana al valor del área de la región delimitada.

Fue latente la necesidad de tener una ecuación que permita modelar las situaciones dado que la mayoría de los estudiantes optó por utilizar la ecuación que relacionaba las variables tiempo, velocidad y distancia reiteradamente según las particiones del intervalo (eje x). Pero en las situaciones 2 y 3 no fue posible establecer algún tipo de ecuación que permitiera llevar a cabo dicha relación. Es así que la modelación de situaciones en las cuales no se tiene una ecuación sobre la cual fundar algún tipo de proceso de integración a través del teorema del cálculo para determinar una antiderivada, muestra como alternativa el recurso geométrico de la descomposición de regiones irregulares acotadas como la suma de figuras regulares que permitan tener una aproximación lo suficiente cercana al valor de la integral definida, lo cual representa una ventaja para los estudiantes en el sentido que permite justificar, entre otras aspectos, las diferentes propiedades de la integral (Turégano,1997).

Los métodos de integración numérica son algoritmos que permite trabajar con cualquier tipo función a través de diferentes representaciones geométricas y analíticas (Ortega, 2000) que a través de los recursos tanto visuales, matemáticos y geométricos fundamentan su importancia a través de los pilares de la geometría euclidiana donde básicamente a partir de la definición del área del rectángulo se deducen fórmulas para las áreas de diversas regiones: triángulos, polígonos, trapecios y otras regiones relacionadas (Palencia & García, 2014). Además, con la justificación de los procedimientos de resolución paso a paso entre en los sistemas de representación gráfico y numérico, les proporcionan una ventaja al descubrir la existencia de procedimientos de aproximación para resolver problemas que en otros casos serían complicados de presentar (Camacho & Depool, 2003).

Referencias bibliográficas

Boigues, F.-J.; Llinares, S.; Estruch, V. Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierias relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica fuzzy. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - Relime, 2010, p. 256 - 259.

Camacho, M.; Depool, R.; Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) Derive. Educación matemática, 2003, p. 135

González, F.J.; García, M.C. Resolución de integrales definidas con Excel, Revista Anales de Asepuma, 2014

Larson, R.; Hostetler, R; Edwards, B. Cálculo y Geometría Analítica. España: Mc Grawhill. 2006

Mora, W. ¿se puede saber si una función tiene primitiva elemental? Revista digital — Matemática, Educación e Internet, 2015, p. 1-2.

Nakamura, S. Métodos Numéricos Aplicados con Software. México: Pearson. 1992

Ortega, G. M. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. Revista Latinomaericana de Investigación en Matemática Educativa - Relime, 2000, p. 131 - 135.

Turégano, P. El aprendizaje del concepto de integral. Revista suma 26, noviembre 1997, p. 39-52

---

1. Lic. en Matemáticas, Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Profesor ciencias básicas – Universidad Distrital - Uniminuto. carlospmq@hotmail.com

2. Docente Investigador. Facultad de Ingeniería. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Ingeniera Industrial, MsC en Ingeniería Industrial. PhD. en Educación. mariaramirezsanchez07@gmail.com

3. Docente Investigador. Facultad de Ingeniería. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Ingeniero Electricista- MsC y Ph.D en Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Automática. erivas@udistrital.edu.co

---

Revista ESPACIOS. ISSN 0798 1015
Vol. 40 (Nº 19) Año 2019

[Índice]