ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

Vol. 38 (Nº 41) Año 2017. Pág. 15

Una alternativa para disminuir el costo de las rentas vitalicias en mercados no eficientes

An Alternative for Reducing Costs of Life Annuities in Inefficient Markets

Gabriel Alberto AGUDELO Torres 1; Luis Ceferino FRANCO Arbeláez 2; Luis Eduardo FRANCO Ceballos 3

Recibido: 06/04/2017 • Aprobado: 03/05/2017

Contenido

RESUMEN:
Un aspecto fundamental para las finanzas gubernamentales, empresariales y personales corresponde a la estimación de las reservas actuariales para las rentas vitalicias o pensiones. En este artículo se propone una estrategia para la estimación de la reserva actuarial de una renta vitalicia, a una vida, considerando una dinámica estocástica en un mercado no eficiente, integrada con una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva mayor o igual al pago a realizar. El planteamiento teórico es relevante en la medida que permite disminuir el costo de una renta vitalicia, con los beneficios sociales y fiscales que ello implicaría, al permitir una mayor cobertura de los sistemas de retiro.
Palabras clave: Derivados financieros, reservas actuariales, sistemas pensionales.

ABSTRACT:
A fundamental aspect for governmental, business and personal finances is the estimation of the actuarial reserves for life annuities or pensions. This paper proposes a strategy for the estimation of the actuarial reserve of a life annuity (for one lifetime period), considering a stochastic dynamic in an inefficient market integrated with a hedging strategy that guarantees a future value of the reserve greater or equal to the payment due. The theoretical approach is relevant in as far as it allows to diminish the cost of the life annuity, with the social and fiscal benefits that it would entail, by allowing a wider coverage of the retirement systems.
Keywords: financial derivatives, actuarial reserves, pension systems.

1. Introducción

La gestión de las rentas vitalicias impacta las finanzas de las compañías de seguros, gobiernos y empresas que tienen pasivos pensionales. En este proceso, la estimación del monto de dichas reservas es clave debido a su impacto directo en la estabilidad y cobertura de los sistemas pensionales. Situaciones de inestabilidad en el sistema pensional generan un efecto directo en la calidad de vida de los pensionados y sus familias, pero además afectan la sostenibilidad de las entidades con obligaciones pensionales, con probables desequilibrios sistémicos en la economía (Grinols y Turnovsky, 1993;

Schmedders ,1998).

De acuerdo con Bowers, Gerber, Hickman, Jonnes y Nesbitt (1997), la reserva actuarial es calculada como la suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles. En este cálculo intervienen factores como la probabilidad de vivir de los individuos, la inflación, las edades, el monto del pago y la tasa de interés de descuento denominada "tasa de interés técnico". Sin embargo, hasta ahora no se incluye en el análisis una estructura estocástica del portafolio en el cual está invertida dicha reserva, ya que se supone, usualmente, un mundo determinista. Las metodologías de administración de portafolios incluyendo derivados financieros han sido ampliamente investigadas. Fundamentalmente desde el surgimiento del modelo de Black-Scholes (1973) y Merton (1973), tales estrategias son comunes en los mercados financieros tanto de renta variable, Jarrow y Turnbull (1999), como de renta fija, Jarrow (2002).

En la literatura se encuentra que diversas investigaciones han asumido el estudio de fenómenos financieros considerando la dinámica estocástica para la modelación de variables, entre ellas los precios de productos financieros derivados. Algunos de los trabajos con este enfoque son Black y Scholes (1973), Merton (1973), Cox y Ross (1976), Cox et al. (1985a) y (1985b), Vasicek (1977), Hull y White (1990) y (1993), Black et al. (1990) y Heath et al. (1992). La implementación y análisis de este tipo de modelos, unidos a las nuevas herramientas tecnológicas, han contribuido a la modernización del mercado de capitales favoreciendo una gestión integral de los riesgos financieros.

Respecto a la modelación y aplicaciones específicas para sistemas pensionales en los que se considere la dinámica estocástica de algunas de las variables financieras, se encuentran los trabajos de Nqwira y Gerrard (2007), Bian et al. (2009), Josa y Rincón (2012), Calvo y Vázquez (2014), Agudelo, Franco y Franco (2016a), (2016b), (2016c); Agudelo, Franco, Franco y Zuñiga (2016). Sin embargo, en las versiones originales de los modelos estocásticos aplicados a las finanzas normalmente se utiliza el movimiento browniano geométrico para modelar la dinámica de los precios. Usualmente las diversas aplicaciones que se publican sobre modelación financiera, como por ejemplo Jiménez, Acevedo y Castaño (2016); Jiménez, Acevedo y Rojas (2016), sólo consideran mercados eficientes.

En cuanto a la eficiencia de los mercados, Fama (1965), define un mercado eficiente como aquel en el cual los precios de los activos reflejan plenamente la información disponible. Se distinguen tres niveles de eficiencia (Roberts (1967), Fama (1970)): débil, semi-fuerte y fuerte. Eficiencia débil, se refiere a que las series históricas del mercado, es decir los precios y volúmenes negociados, no poseen ningún tipo de información que sirva a los agentes del mercado para obtener rendimientos extraordinarios de forma consistente; esta hipótesis implica que, por ejemplo, el análisis técnico no le permite a un inversor predecir el comportamiento futuro de un activo financiero. La eficiencia semi-fuerte establece que los precios reflejan además toda la información pública del mercado. Por su parte, la eficiencia en sentido fuerte, establece que los precios reflejan, además de la información histórica de los activos y la información pública, también toda la información privada.

En los modelos financieros que tienen en cuenta la dinámica estocástica de algunas variables, es común encontrar que se asume el supuesto de mercado eficiente, reflejado en el uso del movimiento browniano. León y Vivas (2010) afirman que "Sin embargo, en muchos casos subsisten metodologías y prácticas que aún recaen en el supuesto de movimiento browniano; una de éstas es precisamente la regla de la raíz cuadrada del tiempo, que es, según Sornette (2003), la predicción más importante del modelo de movimiento browniano" (p.5).

Respecto a la regla de la raíz del tiempo, como lo plantea Pirateque (2015), bajo el supuesto de que una serie de retornos es independiente e idénticamente distribuida (IID), la dimensión temporal del riesgo es irrelevante. Por lo anterior, utilizando la regla de la raíz en el tiempo, la volatilidad para un intervalo de tiempo de la serie puede ser calculada a partir de la calculada para otro intervalo de tiempo diferente. La regla de la raíz es relevante en la medida que es aplicada en múltiples modelos de valoración de activos financieros, por ejemplo, las diversas versiones del modelo de Black-Scholes para la valoración de derivados financieros, entre otros.

La regla de la raíz del tiempo se basa en que los precios se comportan de acuerdo con una caminata aleatoria y que sus retornos son independientes. Encontrar dependencias de largo plazo en una serie financiera equivale a invalidar la regla de la raíz. El exponente de Hurst, denotado por H, corresponde a una alternativa para evidenciar que los retornos no son independientes, pero más aún sirve para valorar también el grado de dependencia.

Una serie con un H=0.5, es llamada ruido blanco y corresponde a un proceso aleatorio con incrementos independientes y ausencia de correlación entre los incrementos de la señal. Es decir, los incrementos poseen correlación de cero, por lo que los eventos presentes no intervienen en el futuro.

Las series con valores de $0<H<0.5$, se les llaman ruido rosa, corresponden a memoria corta, y son llamadas series anti persistentes. Este comportamiento también llamado anti correlacional, es conocido como un modelo en donde la media retorna a su condición inicial. Esta situación implica que retornos de un signo tienen alta probabilidad de ser seguidos por retornos del signo contrario. Lo anterior indica que, decrementos en los sucesos pasados, suponen un incremento en los sucesos futuros, y viceversa. Por lo tanto, en este tipo de series, la serie tiende a volver de forma irregular a su procedencia. Según Biagini, Hu, Øksendal, Zhang (2008), las turbulencias financieras y los precios de la electricidad de los mercados eléctricos liberados, podrían tener este tipo de comportamiento anti persistente. Suponer mercados eficientes para valorar fenómenos financieros en donde la serie presente un $H<0.5$ indicaría una posible situación de sobreestimación del riesgo.

Por su parte, una serie con $0.5 < H \leq 1$ corresponde a un proceso con persistencia de largo plazo; es decir es un proceso correlacionado donde retornos de signo positivo tienen alta probabilidad de ser seguidos por retornos igualmente positivos; en este caso se espera que la serie nunca regresa a su condición inicial. Este tipo de procesos son llamados persistentes o correlacionados, y en ellos lo que sucede en el presente impacta los cambios futuros de la serie. Finalmente, una serie con $H=1$ es conocida en la literatura como un proceso ruido negro e indica un proceso determinístico.

Suponer un mercado eficiente es adecuado para la estimación del riesgo en el caso en que la serie sea efectivamente ruido blanco, es decir, que corresponda a un proceso completamente aleatorio e independiente, con ausencia de correlaciones entre los incrementos de la señal. Por otro lado, mediante el cálculo del exponente de Hurst es posible encontrar que la variable tiempo es un elemento relevante para la medición del riesgo financiero, debido a que las volatilidades de corto y largo plazo podrían contener información diferente.

Encontrar dependencias de largo plazo en una serie financiera equivale a invalidar el supuesto del mercado eficiente. El exponente de Hurst es una alternativa para evidenciar que los retornos no son independientes; pero adicionalmente, sirve para valorar el grado de dependencia, ayudando a implementar estimaciones del riesgo acordes con las características particulares de la serie analizada.

Es necesario evaluar, en la aplicación de modelos financieros, la sobreestimación y subestimación de precios y riesgos de activos financieros debido a los efectos que podrían ocasionar los escalamientos erróneos de una serie de tiempo financiera. Trabajos como los de Willinger et al. (1999), Shiryaev (1999), Biagini et al (2007), Mishura (2008) discuten a profundidad la aplicación del exponente de Hurst para el análisis de fenómenos financieros. La utilización del exponente de Hurst en la modelación financiera, permite aplicar el movimiento browniano fraccional, en lugar de usar el movimiento browniano geométrico.

En este artículo se desarrolla un modelo estocástico útil para estimar la reserva actuarial de una renta vitalicia a una vida a partir de una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva mayor o igual al pago a realizar. La alternativa estructurada permite reducir el costo de la renta vitalicia a través de una gestión dinámica del portafolio en el cual está invertida la reserva. El portafolio es valorado teniendo en cuenta la versión del modelo de Black-Scholes que considera el movimiento browniano fraccional, evitando la sobrevaloración o subvaloración del riesgo ocasionada por suponer un mercado eficiente.

Después de esta introducción, en la Sección 2, se presenta el modelo; en la Sección 3 se muestra una aplicación; y finalmente, en la Sección 4, se exponen algunas conclusiones.

2. Metodología

2.1 Cálculo del coeficiente de Hurst

1. Sea N el tamaño de una serie de tiempo correspondiente a los rendimientos de un activo. Al ser la serie de precios de tamaño M, la serie de rendimientos logaritmos vendrá dada por:

   $N_i = Log\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right),\quad i = 1, 2, 3, \ldots, N.$

2. Se divide la serie de rendimientos en A subperiodos contiguos de longitud n, tal que $A * n = N$. Si se nombra cada subperiodo como I_a, con $a = 1,2,3, \ldots, A$, y cada elemento en I_a es etiquetado $N_{k,a}$, tal que $k = 1,2,3, \ldots, n$; para cada subperiodo I_a de longitud n, el valor promedio está definido por la siguiente expresión:

$$e_a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_{k,a}$$

3. Se obtiene la serie de tiempo acumulada de diferencias con respecto a la media $X_{k,a}$, definida como:

   $X_{k,a} = \sum_{i=1}^{k}(N_{i,a} - e_a),\quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$

4. Sea RI_a la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $X_{k,a}$ para cada subperiodo I_a.

   $RI_a = Max(X_{k,a}) - Max(X_{k,a}),\quad 1 \leq k \leq n.$

5. Sea SI_a la desviación estándar muestral de cada periodo I_a.

$$SI_a = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(N_{i,a} - e_a)^2}$$

6. Para cada subperiodo I_a, el rango se normaliza dividiendo por su desviación estándar SI_a obteniendo así el rango reescalado. Como se tienen A periodos continuos de longitud n, el valor promedio para longitud es:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = \left(\frac{1}{A}\right)\sum_{a=1}^{A}\left(\frac{RI_a}{SI_a}\right)$$

7. La longitud n se incrementa al siguiente valor posible de tal forma que $\frac{M-1}{n}$ sea un número entero. Se comienza con el mínimo valor que cumpla la condición anterior y se repiten los seis primeros pasos hasta $n = \frac{M-1}{2}$.

8. Se realiza una regresión lineal entre las series $Log\left(\frac{R}{S}\right)_n$ como variable exógena y $Log(n)$ como variable endógena. La ordenada en el origen es $Log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente de Hurst H.

$$Log\left(\frac{R}{S}\right)_n = Log(c) + H * Log(n)$$

2.2. El modelo

2.2.1. Pago de una renta como una combinación de opciones

Sea V_t el valor del fondo necesario para soportar el pago futuro D_T, que se realizará siempre y cuando la persona de edad χ sobreviva por lo menos $T-t$ años más. Por lo tanto, el valor de dicho fondo corresponde al valor presente actuarial:

$$V_t = D_T\left({}_{(T-t)}p_\chi\right)e^{-r(T-t)}$$

donde r es la tasa de interés técnica utilizada para el cálculo actuarial y ${}_{(T-t)}p_\chi$ es la probabilidad de que una persona de edad χ sobreviva por lo menos $T-t$ años más. Se supone que V_t es conducido por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dB_H(t).$$

Si $V_T < D_T$, entonces se incumple con el pago, por lo menos parcialmente, y no hay ningún tipo de excedente, denotado S_T, en el portafolio que respalda la renta vitalicia; es decir, $S_T = 0$. Si $V_T \geq D_T$, entonces se cumple con el pago; por lo tanto $S_T = V_T - D_T$. En consecuencia, se sigue que:

$$S_T = \max(V_T - D_T, 0)$$

Esto corresponde al pago en la fecha de vencimiento T de una opción de compra (*call*).

Con base en las ecuaciones de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), y suponiendo que la reserva para la renta vitalicia tiene una rentabilidad, denotada por μ_v, igual a la tasa libre de riesgo, se tiene que:

$$S_t = V_t\Phi(d_{1,t}) - D_T e^{-\mu_v(T-t)}\Phi(d_{2,t})$$

donde:

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \mu_v(T-t) + \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \mu_v(T-t) - \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

y $\Phi(x)$ es la probabilidad de que una variable normalmente distribuida con media cero y desviación estándar uno sea menor que x. A partir de $V_t = D_T({}_{T-t}p_{\chi})e^{-r(T-t)}$, se tiene que

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left({}_{T-t}p_{\chi}e^{-r(T-t)}\right) + \mu_v(T-t) + \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

Si $V_T < D_T$, el faltante está dado por $F_T = D_T - V_T$. En caso contrario el faltante será cero ($F_T = 0$). Por lo tanto, se tiene que

$$F_T = \max(D_T - V_T, 0)$$

y que

$$F_t = D_T e^{-\mu_v(T-t)}\Phi(-d_{2,t}) - V_t\Phi(-d_{1,t})$$

con

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left({}_{T-t}p_{\chi}e^{-r(T-t)}\right) + \mu_v(T-t) + \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left({}_{T-t}p_{\chi}e^{-r(T-t)}\right) + \mu_v(T-t) - \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

Como el pagador de la obligación debe cubrir con sus propios recursos el posible faltante, o bien quedarse con el posible excedente, entonces se tiene una opción call en posición larga y una opción put en posición corta, ambas con subyacente V_t y precio de ejercicio D_T. Por lo tanto, el valor del portafolio de opciones en el tiempo t satisface por la paridad condición de paridad put-cal:

$$S_t - F_t = V_t - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)}$$

La ganancia obtenida será la diferencia entre V_t y el pago D_T a realizar descontado a una tasa de rentabilidad igual al parámetro de tendencia de la EDE que describe el cambio en V_t.

2.2.2. Cálculo de probabilidad de incumplimiento del pago D_T

Siguiendo a Merton (1974), es posible calcular la probabilidad de incumplir total o parcialmente con el pago D_T, con base en lo siguiente

Se sabe que:

$$S_t = e^{-\mu_v(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} S_T f_{V_T|V_t}(V|V_t) dv$$

$$= e^{-\mu_v(T-t)} E\left[V_{T\{v>D_T\}} \middle| V_t\right] - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\}$$

donde $f_{V_T|V_t}(V|V_t)$ es la función de densidad de probabilidad de V_T, condicional al valor inicial V_t. Como $S_t = V_t\Phi(d_{1,t}) - D_T e^{-\mu_v*(T-t)}\Phi(d_{2,t})$, entonces:

$$\mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\} = \Phi(d_{2,t})$$

Por lo tanto, la probabilidad de incumplimiento será:

$$\mathbb{P}\{V_T < D_T|V_t\} = 1 - \Phi(d_{2,t})$$

donde

$$d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left({}_{T-t}p_{\chi}\, e^{-r(T-t)}\right) + \mu_v(T-t) - \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

Si la probabilidad de incumplimiento es inaceptable para el administrador de la renta vitalicia, la opción put en posición corta que resulta de la descomposición realizada en la Sección 2.1 puede ser anulada a través de una cobertura dinámica como se expone a continuación.

2.2.3 Cobertura dinámica de los déficits de reserva

Para determinar el monto de la reserva constituida debe verse a la obligación como la combinación de una opción call en posición larga con una put en posición corta. En ese sentido, una cobertura dinámica corresponderá a encontrar un portafolio óptimo en el cual el riesgo de mercado sea eliminado cuando $V_T < D_T$. Se considera el portafolio Π_t conformado por w_1 unidades de posiciones cortas en la reserva V_t y w_2 opciones put (F_t) en posición corta.

$$\Pi_t = -w_1 V_t - w_2 F_t$$

El cambio en el valor del portafolio está dado por

$$\mathrm{d}\Pi_t = -w_1 dV_t - w_2 dF_t$$

El Lema de Ito proporciona la EDE que describe el cambio en F_t.

$$dF_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial V_t}\mu_v V_t + \sigma_v^2 V_t^2 H t^{2H-1}\frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\right)dt + \frac{\partial F}{\partial V_t}\sigma_v V_t dB_H(t)$$

Reemplazando dV_t y dF_t en $\mathrm{d}\Pi_t$ se obtiene:

$$\mathrm{d}\Pi_t = \left(-w_1 - w_2\frac{\partial F}{\partial t}\right)\mu_v V_t dt + \left(-w_1 - w_2 * \frac{\partial F}{\partial V_t}\right)\sigma_v V_t dB_H(t) - w_2\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sigma_v^2 V_t^2 H t^{2H-1}\frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\right)dt$$

Para eliminar el riesgo de mercado, si se hace $w_2 = 1$, es necesario que $-w_1 = \frac{\partial F}{\partial V_t}$, y como $F_t = D_T e^{-\mu_v(T-t)}\Phi(-d_{2,t}) - V_t\Phi(-d_{1,t})$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial V_t} = -1 + \Phi(d_{1,t})$$

Por lo tanto,

$$w_1 = 1 - \Phi\left(\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \mu_v(T-t) + \left(\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}{\sigma_v\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}\right)$$

Es decir, por cada opción put en posición corta contenida en el portafolio (o en forma equivalente, por cada obligación de pagar D_T en el tiempo T), en el instante t se debe tener en posición corta un porcentaje sobre la reserva V_t igual a $1 - \Phi(d_{1,t})$. De no ser posible tal posición, se utilizará un activo Z tal que $\mathrm{Corr}(V_t, Z_t) \approx 1$. La estrategia anterior constituye una cobertura delta para una opción put en posición corta.

El riesgo que se asume en una sucesión de pagos D_T, con $T = 1,2,3, \dots, n$, es equivalente a tener un portafolio conformado por opciones call en posición larga sin costo alguno, cuya valuación individual viene dada simultáneamente por las siguientes dos ecuaciones, ya expuestas en la sección anterior

$$S_t = V_t\Phi(d_{1,t}) - D_T e^{-\mu_v(T-t)}\Phi(d_{2,t})$$

y

$$S_t = e^{-\mu_v(T-t)}E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right] - D_T e^{-\mu_v(T-t)}\mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\}$$

De lo anterior se deduce que

$$V_t\Phi(d_{1,t}) = e^{-\mu_v(T-t)}E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right].$$

Es decir, el valor esperado condicional de la reserva para el vencimiento T, viene dado por:

$$E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right] = V_t^{T+1}\Phi(d_{1,t})e^{\mu_v*(T-t)}$$

Por lo que la reserva actuarial necesaria para soportar el pago D_{T+1} será:

$$\begin{aligned}V_t^{T+1} &= D_{T+1}\left({}_{T+1-t}p_{\phi}\right)e^{-r*(T+1-t)} - E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right]e^{-\mu_v(T-t)} + C_t^{T+1}\\ &= D_{T+1}\left({}_{T+1-t}p_{\chi}\right)e^{-r*(T+1-t)} - V_t\Phi(d_{1,t})e^{\mu_v(T-t)}e^{-\mu_v(T-t)} + C_t^{T+1}\\ &= D_{T+1}\left({}_{T+1-t}p_{\chi}\right)e^{-r*(T+1-t)} - V_t\Phi(d_{1,t}) + C_t^{T+1}\end{aligned}$$

Donde C_t^{T+1} es el costo asociado a la cobertura dinámica.

Cuando $[1-\Phi(d_{1,t})] - [1-\Phi(d_{1,T+1})] \geq 0$, no se incurre en costo de cobertura, pues se deben abrir posiciones cortas o en su defecto mantener las actuarles.

Para el caso en que $[1-\Phi(d_{1,t})] - [1-\Phi(d_{1,T+1})] < 0$, deben ser cerradas posiciones cortas para mantener activa la cobertura delta. Suponiendo que las posiciones cortas cerradas corresponden a las abiertas en el instante t, este costo puede calcularse como el valor presente actuarial de la cantidad de posiciones a cerrar $[1-\Phi(d_{1,t})] - [1-\Phi(d_{1,T+1})]$ multiplicadas por el diferencial de precio $V_{t+1-s}^{T+1} - V_t^{T+1}$.

$$C_t^{T+1} = \int_t^{T+1}\{[1-\Phi(d_{1,t})] - [1-\Phi(d_{1,T+1})]\}(V_{t+1-s}^{T+1} - V_t^{T+1})\left({}_{T+1-s}p_{\chi}\right)e^{-\mu_v(T-t)}ds$$

O lo que es lo mismo,

$$C_t^{T+1} = \int_t^{T+1}[\Phi_T(d_{1,T}) - \Phi_{T+1}(d_{1,T+1})](V_{t+1-s}^{T+1} - V_t^{T+1})\left({}_{T+1-s}p_{\chi}\right)e^{-\mu_v(T-t)}ds$$

Por lo tanto, para que la reserva actuarial con cobertura dinámica sea menor que la reserva actuarial calculada por el método tradicional es necesario que:

$$V_t^{T+1}\Phi(d_1) > \int_t^{T+1}[\Phi_T(d_{1,T}) - \Phi_{T+1}(d_{1,T+1})](V_{t+1-s}^{T+1} - V_t^{T+1})\left({}_{T+1-s}p_{\chi}\right)e^{-\mu_v(T-t)}ds$$

3. Aplicación del modelo

Se considera una población cuya Tabla de mortalidad se muestra en el Anexo 1. Para esta aplicación se supone una tasa de interés técnico r=4.5%. Si la inflación anual proyectada es 3.5% y los pagos a realizar a una persona de 62 años de edad crecen anualmente en un porcentaje igual, siendo el primer pago correspondiente a $7.000 USD, entonces un cálculo actuarial tradicional arroja un valor de reserva actuarial de $123.043 USD. Si se supone que la EDE que conduce las reservas pensionales de dicha población es:

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dB_H(t)$$

donde $\mu_v = 4.5\%$, $\sigma_v = 7\%$, $H = 0.5$ y la parte de la obligación correspondiente a las opciones put en posición corta es gestionada mediante una cobertura delta, entonces el excedente esperado en cada período, $E\left[V_{T\{v>D_T\}} \middle| V_t\right] - D_T$, puede ser considerado parte de la reserva necesaria para el siguiente período V_{T+1}, tal como se expuso en la sección 2.3.

Esta gestión dinámica del portafolio conduce a una reserva actuarial de \$82.464 USD, lo que corresponde a una disminución de 33% con respecto al cálculo actuarial tradicional. Los cálculos detallados se presentan en el Cuadro 1.

Si la inversión de la reserva actuarial se realiza en un mercado no eficiente con *H*=0.57, la disminución correspondería a 44,72%, equivalente a una reserva de \$68.023 USD. Los cálculos detallados se presentan en el Cuadro 2.

Cuadro 1. Detalle del cálculo de la reserva actuarial (*H*=0.5)

T-t	DT	tPx	Trad. Vt	d1	d2	PUT (short)	Delta	Hedging	CALL (long)	E(VT|Vt)	New Vt
1	7.000	0,990803	6.630	- 0,096995	- 0,166995	218,373339	- 0,538635	- 3.571,384622	156,826310	3.200	6.630
2	7.245	0,980620	6.493	- 0,148189	- 0,247184	328,060640	- 0,558903	- 3.629,020629	199,738983	3.134	3.293
3	7.499	0,969385	6.351	-0,195830	-0,317074	422,328578	- 0,577628	- 3.668,546272	221,752329	3.070	3.217
4	7.761	0,957033	6.204	-0,243694	-0,383694	510,506904	- 0,596266	- 3.699,245932	231,972602	2.999	3.134
5	8.033	0,943496	6.052	-0,293327	-0,449852	596,507762	- 0,615364	- 3.724,048932	234,080391	2.915	3.053
6	8.314	0,928708	5.894	-0,345615	-0,517079	682,568934	- 0,635184	- 3.743,855275	230,109981	2.817	2.979
7	8.605	0,912604	5.731	-0,401201	-0,586403	770,226898	- 0,655864	- 3.758,662362	221,407265	2.702	2.914
8	8.906	0,895120	5.562	-0,460615	-0,658605	860,657307	- 0,677462	- 3.767,915550	208,990613	2.571	2.859
9	9.218	0,876200	5.387	-0,524338	-0,734338	954,826716	- 0,699978	- 3.770,677020	193,707994	2.423	2.816
10	9.540	0,855788	5.206	-0,592849	-0,814208	1.053,574191	- 0,723359	- 3.765,725305	176,310018	2.259	2.783
11	9.874	0,833840	5.019	-0,666616	-0,898780	1.157,620886	- 0,747491	- 3.751,582710	157,498395	2.079	2.760
12	10.220	0,810320	4.826	-0,746129	-0,988616	1.267,591178	- 0,772205	- 3.726,592481	137,936977	1.886	2.747
13	10.577	0,785203	4.627	-0,831904	-1,084292	1.384,006341	- 0,797268	- 3.688,981166	118,255574	1.684	2.741
14	10.948	0,758481	4.422	-0,924485	-1,186401	1.507,258091	- 0,822383	- 3.636,938582	99,045895	1.475	2.739
15	11.331	0,730163	4.212	-1,024451	-1,295559	1.637,585139	- 0,847189	- 3.568,733446	80,846114	1.264	2.738
16	11.727	0,700277	3.997	-1,132425	-1,412425	1.775,045771	- 0,871272	- 3.482,852375	64,120795	1.057	2.733
17	12.138	0,668875	3.778	-1,249084	-1,537701	1.919,489317	- 0,894183	- 3.378,157959	49,239071	859	2.721

18	12.563	0,636038	3.555	-1,375145	-1,672130	2.070,507031	- 0,915457	- 3.254,065058	36,456554	676	2.695
19	13.002	0,601874	3.328	-1,511384	-1,816507	2.227,422164	- 0,934655	- 3.110,706177	25,897285	511	2.653
20	13.458	0,566522	3.100	-1,658649	-1,971699	2.389,285592	- 0,951407	- 2.949,053600	17,547597	370	2.588
21	13.929	0,530158	2.870	-1,817848	-2,138628	2.554,861938	- 0,965456	- 2.770,989478	11,264494	255	2.500
22	14.416	0,492991	2.641	-1,989970	-2,318299	2.722,671265	- 0,976703	- 2.579,259365	6,796138	166	2.386
23	14.921	0,455265	2.413	-2,176076	-2,511784	2.891,015618	- 0,985225	- 2.377,334785	3,817790	100	2.247
24	15.443	0,417258	2.188	-2,377322	-2,720250	3.058,054715	- 0,991281	- 2.169,146561	1,975135	56	2.088
25	15.983	0,379277	1.968	-2,594964	-2,944964	3.221,869710	- 0,995270	- 1.958,767827	0,929023	29	1.912
26	16.543	0,341658	1.754	-2,830360	-3,187291	3.380,522839	- 0,997675	- 1.750,102232	0,391344	13	1.726
27	17.122	0,304755	1.548	-3,084967	-3,448698	3.532,116886	- 0,998982	- 1.546,635081	0,145057	5	1.535
28	17.721	0,268930	1.352	-3,360389	-3,730794	3.674,862451	- 0,999611	- 1.351,282240	0,046341	2	1.346
29	18.341	0,234545	1.167	-3,658356	-4,035317	3.807,104725	- 0,999873	- 1.166,390375	0,012454	1	1.165
30	18.983	0,201949	994	-3,980745	-4,364151	3.927,368358	- 0,999966	-993,795913	0,002736	0	993
31	19.648	0,171466	835	-4,329570	-4,719314	4.034,393631	- 0,999993	-834,914052	0,000475	0	835
32	20.335	0,143374	691	-4,707059	-5,103039	4.127,206533	- 0,999999	-690,770851	0,000063	0	691
33	21.047	0,117899	562	-5,115579	-5,517699	4.205,136008	- 1,000000	-562,048052	0,000006	0	562
34	21.784	0,095199	449	-5,557753	-5,965920	4.267,880637	- 1,000000	-449,044954	0,000000	0	449
35	22.546	0,075312	351	-6,037710	-6,451836	4.315,702508	- 1,000000	-351,494399	0,000000	0	351
36	23.335	0,058199	269	-6,561142	-6,981142	4.349,227929	- 1,000000	-268,764559	0,000000	0	269
37	24.152	0,043795	200	-7,133940	-7,559733	4.369,193750	- 1,000000	-200,113061	0,000000	0	200
38	24.997	0,031981	145	-7,762291	-8,193800	4.376,541814	- 1,000000	-144,592594	0,000000	0	145
39	25.872	0,022580	101	-8,452766	-8,889916	4.372,457367	- 1,000000	-101,012500	0,000000	0	101
40	26.778	0,015352	68	-9,212420	-9,655139	4.358,355335	- 1,000000	- 67,952502	0,000000	0	68
41	27.715	0,010005	44	- 10,049077	- 10,497296	4.335,823101	- 1,000000	- 43,819915	0,000000	0	44

42	28.685	0,006221	27	- 10,970942	- 11,424594	4.306,513361	- 1,000000	- 26,956802	0,000000	0	27
43	29.689	0,003668	16	- 11,988216	- 12,447237	4.272,057772	- 1,000000	- 15,726322	0,000000	0	16
44	30.728	0,002038	9	- 13,111554	- 13,575881	4.233,933886	- 1,000000	- 8,645787	0,000000	0	9
45	31.803	0,001059	4	- 14,353683	- 14,823257	4.193,406035	- 1,000000	- 4,445791	0,000000	0	4
46	32.917	0,000511	2	- 15,728398	- 16,203161	4.151,474785	- 1,000000	- 2,120743	0,000000	0	2
47	34.069	0,000225	1	- 17,260860	- 17,740756	4.108,880317	- 1,000000	- 0,925489	0,000000	0	1
48	35.261	0,000090	0	- 18,959323	- 19,444298	4.066,110541	- 1,000000	- 0,367199	0,000000	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 2. Detalle del cálculo de la reserva actuarial (H=0.57)

T-t	DT	tPx	Vt	d1	d2	PUT corta	Delta	Cobertura	CALL larga	E(VT|Vt)	Nuevo Vt
48	35.261	9,02991E-05	0	-14,325888	-14,961813	4.066	-1,000000	-0,367199	0	0	0
47	34.069	0,00022519	1	-12,971575	-13,603635	4.109	-1,000000	-0,925489	0	0	1
46	32.917	0,00051058	2	-11,768312	-12,395689	4.151	-1,000000	-2,120743	0	0	2
45	31.803	0,001059063	4	-10,697019	-11,319317	4.193	-1,000000	-4,445791	0	0	4
44	30.728	0,002037861	9	-9,734590	-10,351520	4.234	-1,000000	-8,645787	0	0	9
43	29.689	0,003667704	16	-8,868292	-9,479609	4.272	-1,000000	-15,726322	0	0	16
42	28.685	0,006220604	27	-8,086976	-8,692465	4.307	-1,000000	-26,956802	0	0	27
41	27.715	0,010005362	44	-7,381499	-7,980965	4.336	-1,000000	-43,819915	0	0	44
40	26.778	0,01535196	68	-6,743350	-7,336606	4.358	-1,000000	-67,952502	0	0	68
39	25.872	0,022580347	101	-6,165705	-6,752575	4.372	-1,000000	-101,012500	0	0	101
38	24.997	0,031981485	145	-5,642175	-6,222486	4.377	-1,000000	-144,592593	0	0	145
37	24.152	0,043795059	200	-5,167053	-5,740636	4.369	-1,000000	-200,113037	0	0	200
36	23.335	0,058199436	269	-4,735081	-5,301769	4.349	-0,999999	-268,764265	0	0	269
35	22.546	0,075311671	351	-4,341358	-4,900982	4.316	-0,999993	-351,491910	0	0	351
34	21.784	0,095198652	449	-3,981260	-4,533653	4.268	-0,999966	-449,029569	0	0	449
33	21.047	0,117899398	562	-3,650360	-4,195352	4.205	-0,999869	-561,974548	0	0	561

32	20.335	0,143373775	691	-3,345430	-3,882847	4.127	-0,999589	-690,487967	0	1	687
31	19.648	0,17146571	835	-3,064379	-3,594045	4.035	-0,998909	-834,009714	0	4	825
30	18.983	0,2019489	994	-2,805326	-3,327061	3.928	-0,997487	-991,332271	0	10	972
29	18.341	0,234544642	1.167	-2,566515	-3,080133	3.808	-0,994864	-1160,546729	1	22	1.121
28	17.721	0,268929644	1.352	-2,346362	-2,851671	3.677	-0,990521	-1338,994746	2	45	1.268
27	17.122	0,304754972	1.548	-2,143398	-2,640199	3.536	-0,983959	-1523,376797	4	84	1.406
26	16.543	0,341658315	1.754	-1,956275	-2,444361	3.387	-0,974784	-1709,946195	7	143	1.528
25	15.983	0,379277362	1.968	-1,783747	-2,262903	3.233	-0,962768	-1894,800692	12	226	1.632
24	15.443	0,417257605	2.188	-1,624686	-2,094685	3.075	-0,947885	-2074,187783	19	336	1.715
23	14.921	0,455264604	2.413	-1,478046	-1,938652	2.916	-0,930302	-2244,806511	29	473	1.776
22	14.416	0,492990672	2.641	-1,342862	-1,793825	2.758	-0,910342	-2404,013855	42	637	1.817
21	13.929	0,530158224	2.870	-1,218248	-1,659304	2.601	-0,888435	-2549,928592	57	824	1.841
20	13.458	0,566522002	3.100	-1,103396	-1,534263	2.448	-0,865072	-2681,445261	76	1.029	1.853
19	13.002	0,601873539	3.328	-0,997554	-1,417931	2.300	-0,840752	-2798,180633	98	1.246	1.858
18	12.563	0,63603781	3.555	-0,900033	-1,309601	2.156	-0,815949	-2900,355368	122	1.471	1.858
17	12.138	0,668875464	3.778	-0,810195	-1,208607	2.019	-0,791086	-2988,665448	149	1.696	1.861
16	11.727	0,700277252	3.997	-0,727458	-1,114339	1.887	-0,766527	-3064,141502	177	1.917	1.868
15	11.331	0,730162906	4.212	-0,651285	-1,026230	1.762	-0,742569	-3128,028089	205	2.130	1.883
14	10.948	0,758481147	4.422	-0,581176	-0,943738	1.642	-0,719439	-3181,676182	234	2.330	1.908
13	10.577	0,785202989	4.627	-0,516672	-0,866358	1.528	-0,697308	-3226,460064	262	2.514	1.946
12	10.220	0,810319514	4.826	-0,457351	-0,793614	1.419	-0,676291	-3263,717281	289	2.681	1.997
11	9.874	0,83383964	5.019	-0,402821	-0,725047	1.315	-0,656460	-3294,704966	314	2.829	2.062
10	9.540	0,855787893	5.206	-0,352715	-0,660207	1.214	-0,637849	-3320,569293	337	2.957	2.141
9	9.218	0,876199947	5.387	-0,306694	-0,598651	1.117	-0,620462	-3342,333806	356	3.065	2.232
8	8.906	0,895120393	5.562	-0,264443	-0,539930	1.022	-0,604281	-3360,892149	370	3.155	2.336
7	8.605	0,912603858	5.731	-0,225651	-0,483555	929	-0,589264	-3376,985731	380	3.225	2.452

6	8.314	0,928708311	5.894	-0,190024	-0,428987	836	-0,575355	-3391,215365	383	3.279	2.578
5	8.033	0,94349618	6.052	-0,157261	-0,375575	742	-0,562480	-3404,008186	380	3.316	2.713
4	7.761	0,95703324	6.204	-0,127025	-0,322443	645	-0,550540	-3415,558403	367	3.338	2.856
3	7.499	0,969385264	6.351	-0,098901	-0,268268	543	-0,539392	-3425,702569	342	3.348	3.003
2	7.245	0,980620254	6.493	-0,072214	-0,210606	430	-0,528784	-3433,454323	301	3.348	3.151
1	7.000	0,99080287	6.630	-0,045384	-0,143315	292	-0,518099	-3435,224376	231	3.342	6.630

4. Conclusiones

En este artículo se propone un planteamiento teórico para la estimación de la reserva actuarial de una renta vitalicia a una vida considerando la dinámica estocástica del portafolio en el cual está invertida; además se estructura una estrategia de cobertura que impacta de manera directa dicha estimación. La estrategia es relevante en la medida que permite disminuir el costo de una renta vitalicia, con los beneficios sociales y fiscales que ello implica, al permitir una mayor cobertura de los sistemas de retiro. Futuras investigaciones podrían estar orientadas al análisis de las condiciones regulatorias y de mercado necesarias para implementar lo planteado en este artículo.

Anexo 1

Tabla de mortalidad

X	l(x)	x	l(x)	x	l(x)
15	1.000.000	53	947.843	91	210.391
16	999.515	54	943.766	92	181.152
17	999.019	55	939.348	93	153.808
18	998.510	56	934.604	94	128.609
19	997.988	57	929.498	95	105.758
20	997.451	58	923.991	96	85.395
21	996.898	59	918.039	97	67.556
22	996.327	60	911.595	98	52.206
23	995.736	61	904.607	99	39.285
24	995.124	62	897.019	100	28.688
25	994.488	63	888.769	101	20.255
26	993.826	64	879.635	102	13.771
27	993.136	65	869.557	103	8.975

28	992.415	66	858.477	104	5.580
29	991.660	67	846.334	105	3.290
30	990.868	68	833.069	106	1.828
31	990.036	69	818.623	107	950
32	989.159	70	802.940	108	458
33	988.233	71	785.968	109	202
34	987.254	72	767.658	110	81
35	986.216	73	747.970		
36	985.114	74	726.872		
37	983.942	75	704.342		
38	982.693	76	680.372		
39	981.360	77	654.970		
40	979.936	78	628.162		
41	978.411	79	599.994		
42	976.776	80	570.538		
43	975.021	81	539.892		
44	973.135	82	508.181		
45	971.105	83	475.562		
46	968.919	84	442.222		
47	966.561	85	408.381		
48	964.017	86	374.288		
49	961.269	87	340.219		
50	958.298	88	306.474		
51	955.085	89	273.371		
52	951.608	90	241.235		

Referencias

Agudelo, G.A., Franco, L.C., Franco, L.E. (2016a). Modelo actuarial para el cálculo de la probabilidad de pensión mediante un proceso de difusión con saltos. Revista ESPACIOS. Vol. 37. No 09. p.25.

Agudelo, G.A., Franco, L.C., Franco, L.E. (2016b).Valoración de Seguros de Vida en presencia de Dependencia Espacial. Revista ESPACIOS. Vol. 37. No 28, p.3.

Agudelo, G.A., Franco, L.C., Franco, L.E. (2016c). Cálculo Actuarial: Introducción a la actuaría de vida., Colombia: Fondo Editorial ITM. ISBN: 978-958-8743-98-1, 2 ed.

Agudelo, G.A., Franco, L.E., Franco, L.C., Zuñiga, L.G. (2016). Modelación y Simulación de Rentas Vitalicias.Colombia: Optimal Research SAS. ISBN: 978-958-95363-7-7,1 ed.

Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., & Zhang, T. (2008). Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications. Springer Science & Business Media.

Black, E, E. Derman, and W. Toy (1990). A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options. Financial Analysts Journal (January-February), 33-39.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Option and Corporative Liabilities". *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No 3, pp. 637-654.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D.A. and Nesbitt, C. J. (1997). Actuarial Mathematics, 2nd edition. Itasca: Society of Actuaries.

Bian, B., Yuan, Q., Zhang, H. (2009). "Financial valuation and optimal strategy for retirement benefits in a jump diffusion model". *International Conference on Control and Automation, ICCA*, pp. 2233-2236.

Calvo-Garrido, M.C., Vásquez, C. (2014). "Pricing pension plans under jump–diffusion models for the salary." *Computers & Mathematics with Applications*, Vol 68, No. 12, 1933-1944.

Cox, J. C., Ross, S. A. (1976), “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes”, Journal of Financial Economics, Vol. 3, No. 1, pp. 145-166.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, Econometrica, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985b). A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Fama, E. F. (1965). Random walks in stock market prices. Financial analysts journal, 51(1), 75-80.

Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. The journal of Finance, 25(2), 383-417.

Grinols, E. L. y S. J. Turnovsky (1993). "Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 1-36.

Heath, D., R.A. Jarrow, and A. Morton (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. Econometrica, Vol. 60, No. 1, pp. 77-105.

Holton, G. A. (1992). Time: the second dimension of risk. Financial Analysts Journal, 38-45.

Hull, J. and A. White (1990). Pricing interest rate derivative securities. The Review of Financial Studies, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

Hull, J. and A. White (1993). One-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 28, No. 2, pp. 235-254.

Jarrow, R. A. (2002). Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options, 2nd edition. Stanford University Press.

Jarrow, R. A., Turnbull, S. (1999). Derivative Securities: The Complete Investor’s Guide, 2nd edition. South-Western College Publishing.

Jiménez, L. M., Acevedo, N. M., Castaño, N. E. (2016). Cobertura cambiaria por medio de instrumentos derivados para empresa exportadora de flores en Colombia. EN-CONTEXTO, 5(5), 119-138.

Jiménez, L. M., Acevedo N. M., Rojas, M. D. (2016). Valoración de opción real en proyectos de generación de energía eólica en Colombia. Revista ESPACIOS. Vol. 37, No 26, p.26.

Josa-Fombellida, R., Rincón-Zapatero, J. P. (2012). "Stochastic pension funding when the benefit and the risky asset follow jump diffusion processes". European Journal of Operational Research, 220 (2), pp. 404-413.

León, C., Vivas, F. (2010). Dependencia de largo plazo y la regla de la raíz del tiempo para escalar la volatilidad en el mercado colombiano. No. 007011. Banco de la República.

Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Mishura, Y. 2004. Fractional stochastic integration and Black Scholes equation for fractional Brownian model with stochastic volatility. Stoch. Stoch. Rep., 76, 4, 363–381.

Ngwira, B., Gerrard, R.(2007)."Stochastic pension fund control in the presence of Poisson jumps". Insurance: Mathematics and Economics, 40 (2), pp. 283-292.

Pirateque, J.E. 2014. Uso de la Metodología Wavelets para la validación de la regla de la raíz del tiempo y su aplicación al riesgo de mercado. Borradores de economía. Banco de la Republica de Colombia. No. 809.

Roberts, H. V. (1959). Stock-Market "Patterns" And Financial Analysis: Methodological Suggestions. *The Journal of Finance*, *14*(1), 1-10.

Schmedders, K. (1998). "Computing Equilibria in the General Equilibrium Model with Incomplete Asset Markets". Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 22, No. 8-9, pp. 1375-1401.

Shiryaev, A. (1999).Essentials of Stochastic Finance. World Scientific.

Sornette, D. (2003). Why Stock Markets Crash, New Jersey, Princeton University Press.

Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

Willinger, W., Taqqu, M.S., and Teverovsky, V. 1999. Stock market prices and long range dependence. Fin. and Stoch. 3, 1–13.

---

1. Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia. Email: albertoagudelo@itm.edu.co

2. Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia. Email: luisfranco@itm.edu.co

3. Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia. Email: luisefranco@itm.edu.co

---